Közgazdasági Szemle, LV. évf., 2008. január (3–24. o.)

ZALAI ERNŐ

Műszaki és gazdasági hatékonyság Koopmans termeléselméletében

Koopmans gyakorlati problémák megoldása során szerzett tapasztalatait általánosítva fogott hozzá a lineáris tevékenységelemzési modell kidolgozásához. Meglepődve tapasztalta, hogy a korabeli közgazdaságtan nem rendelkezett egységes, kellően egzakt termeléselmélettel és fogalomrendszerrel. Úttörő dolgozatában ezért – mintegy a lineáris tevékenységelemzési modell elméleti kereteként – lerakta a technológiai halmazok fogalmán nyugvó axiomatikus termeléselmélet alapjait is. Nevéhez fűződik a termelési hatékonyság és a hatékonysági árak fogalmának egzakt definíciója, s az egymást kölcsönösen feltételező viszonyuk igazolása a lineáris tevékenységelemzési modell keretében.

A hatékonyság manapság használatos, pusztán műszaki szempontból értelmezett definícióját Koopmans csak sajátos esetként tárgyalta, célja a gazdasági hatékonyság fogalmának a bevezetése és elemzése volt. Dolgozatunkban a lineáris programozás dualitási tételei segítségével rekonstruáljuk ez utóbbira vonatkozó eredményeit. Megmutatjuk, hogy egyrészt bizonyításai egyenértékűek a lineáris programozás dualitási tételeinek igazolásával, másrészt a gazdasági hatékonysági árak voltaképpen a mai értelemben vett árnyékárak. Rámutatunk arra is, hogy a gazdasági hatékonyság értelmezéséhez megfogalmazott modellje az Arrow–Debreu–McKenzie-féle általános egyensúlyelméleti modellek közvetlen előzményének tekinthető, tartalmazta azok szinte minden lényeges elemét és fogalmát – az egyensúlyi árak nem mások, mint a Koopmans-féle hatékonysági árak. Végezetül újraértelmezzük Koopmans modelljét a vállalati technológiai mikroökonómiai leírásának lehetséges eszközeként.
Journal of Economic Literature (JEL) kód: B23, B41, C61, D20, D50.

Az idő szűr és rostál. Nem vakon, de nem is hibátlanul. Ahol hiányzik a szűrés empirikus alapja, ott az utókor szubjektív és haszonelvű képviselői rostálnak, legitimációt keresve saját dolgozataikhoz vagy eszméikhez a neves elődök munkáiban. Az idézett klasszikusok műveit eredetiben olvasva, gyakran megfigyelhető, hogyan válogatnak az utódok eredményeik közül, eredeti közegéből kiragadva nemegyszer meg is másítva azokat. Ez alól még – mint megmutatjuk – a neoklasszikus matematikai közgazdaságtan vezéralakja, a Nobel-díjjal már életében halhatatlanná tett Koopmans sem volt kivétel. Koopmans, a Cowles kutatócsoport tudományos igazgatójaként, jelentős szerepet játszott a modern matematikai közgazdaságtani kutatási főirányok kialakításában. Az ő szellemi irányítása mellett születtek meg többek között az általános egyensúlyelmélet absztrakt, formalizált modelljei, amelyek mind a mai napig meghatározzák a főáramú közgazdasági kutatásokat.

Zalai Ernő akadémikus, a BCE tanszékvezető egyetemi tanára.

A természettudományos alapképzettségű Koopmans[1] első közgazdasági munkáiban még együtt szerepelt az elmélet, a módszer és az empirikus alkalmazás. Hasonló képzettségű társaival együtt Koopmans is egyre kényszerítőbben érzékelte, hogy „az egzaktság hiánya mindig a fogalmi területről ered" (*Neumann* [1956]), illetve hogy a közgazdaságtan területén hiányzik a „kellően megbízható kísérleti alap" (*Debreu* [1991]). Ezzel is magyarázható, hogy Koopmans figyelme is fokozatosan az elméleti fogalmak tisztázása, a *tiszta tudomány* felé fordult. Ez az általános hangsúlyeltolódás vezetett egyébként a kvantitatív gazdasági kutatások (a korabeli „ökonometria") differenciálódásához, a gyakorlati orientációjú ökonometria és operációkutatás, valamint a túlzott elvontsága miatt gyakran bírált matematikai közgazdaságtan szétválásához.

A Koopmans fő érdemének tartott, 1951-ben megjelent Analysis of production as an efficient combination of activities című dolgozatának újraolvasása[2] több tanulságot is magában rejt az eszmetörténet iránt érdeklődő olvasó számára (*Koopmans* [1951*a*]). Mindenekelőtt imponáló, ahogyan a korábban szűk módszertani területekkel foglalkozó Koopmans 1946 és 1950 között (nagyjában ebben az időszakban készíti el a dolgozat különböző változatait) kibővítette közgazdaságtani ismereteit, s ezzel párhuzamosan az eredendően operációkutatási indíttatású modelljének elméleti érvényességi körét.

A dolgozatában közölt eredményei messze túlmutatnak a *lineáris tevékenységelemzési modellen*, bár ma már többnyire csak ezt emlegetik munkája kapcsán. Dolgozata gyakorlatilag készen kínálta az elméleti keretet és az építőköveket az irányítása mellett dolgozó Arrow és Debreu számára (*Arrow–Debreu* [1954]), illetve (a kissé érdemtelenül háttérbe szorított) McKenzie-nek (*McKenzie* [1954]) az általános egyensúly modern modelljének megfogalmazásához és az egyensúly létezésének bizonyításához. Voltaképpen már „csak" a háztartási viselkedés Hicks, illetve Samuelson által kidolgozott elméletével kellett kibővíteniük Koopmans „félkész" általános egyensúlyi modelljét, és újra felfedezniük, Kakutani és Nash közvetítésén keresztül, Neumann János fixponttételes korai bizonyítását.[3]

A dolgozat egy másik, hatásában természetesen kisebb horderejű eredménye a termelés műszaki és gazdasági hatékonyságának címben jelzett megkülönböztetése, amelyet a vonatkozó tankönyvek és irodalmak – magyarázható, de érthetetlen módon – teljesen mellőznek. Egy olyan érdekes és szükséges distinkcióról van ugyanis szó, amelynek igenis helye van az általános egyensúlyelméletre épülő modern közgazdaságtanban.

S végül a dolgozat egy harmadik érdekességét a használt matematikai apparátus, a lineáris egyenlőtlenségrendszerek és a konvex polihedrikus kúpok elmélete jelenti. Ez a matematikának egy igen érdekes területe, amely – a Farkas-lemmától kezdve, a nevezetes alternatívatételeken át, a lineáris programozással bezárólag – az optimális megoldások létezésének és a dualitási tételek alapját szolgáltatja. De ezek oktatása nincs benne a közgazdászképzés készségekkel és szakértelemmel kapcsolatos követelményrendszerében, ezért Koopmans bizonyításai egy nem matematikus végzettségű közgazdász számára nehezen követhetők.

[1] 1933-ban szerzett egyetemi diplomát Utrechtben matematika és elméleti fizika szakon, és Leidenben doktorált 1936-ban matematikai statisztikából. Disszertációjában a figyelme már közgazdasági alkalmazásokra irányult.

[2] Ehhez pedig a közgazdasági Nobel-díjasokról szóló kötet Koopmansról szóló fejezetének megírására szóló felkérés adta az apropót. Cikkem Bekker Zsuzsa által szerkesztett kötetben megjelent tanulmányom átdolgozott, mindenekelőtt bizonyításokkal kiegészített és más részeket elhagyó, jelentősen átdolgozott változata (*Zalai* [2005]).

[3] Az már egy külön vizsgálat tárgyát képezi, miért csak Arrow–Debreu modellként citálják ezt az eredményt, és miért csak Kakutani és Nash hozzájárulását ismerik el a fixponttételes bizonyítás kapcsán (hiúság vására?).

Dolgozatomban ezért a lineáris programozás egy tőről fakadó, de ismertnek feltételezhető dualitási tételeit fogom felhasználni Koopmans megállapításainak bizonyítására, megmutatva ezzel, hogy azok nem mások, mint a dualitási tételek bizonyításai. *Koopmans* [1951*b*]-ben egyébként ott szerepelt Dantzigék beszámolója a lineáris programozási feladatokról és a szimplex módszerről, illetve Gale önálló, valamint Kuhnnal és Tuckerrel közös dolgozata is (*Gale* [1951], *Gale–Kuhn–Tucker* [1951]). Ezek már tartalmazták a lineáris programozás alapvető tételeit.

Dolgozatomban tehát egyrészt szeretném felhívni a figyelmet a termelés hatékonyságának mellőzött gazdasági definíciójára, másrészt Koopmans főművének eszmetörténeti jelentőségére, harmadrészt a lineáris programozás dualitási tételeire alapozva, áttekinthetőbb és egyszerűbb alternatív utat ajánlok Koopmans több tételben megfogalmazott, mindenekelőtt a hatékonysági árak az árnyékárak kapcsolatára vonatkozó állításainak bizonyítására. Megerősítem Koopmans egyes állításait (bevezetve a szűkös erőforrások fogalmát), és rámutatok arra is, hogy a gazdasági hatékonyság modellje az Arrow–Debreu–McKenzie-féle általános egyensúlyelméleti modellek közvetlen előzményének tekinthető, tartalmazta azok szinte minden lényeges elemét és fogalmát, és az egyensúlyi árak nem mások, mint a Koopmans-féle hatékonysági árak. Végezetül újraértelmezem Koopmans modelljét a vállalati technológiai mikroökonómiai leírásának lehetséges eszközeként.

A lineáris tevékenységelemzési modell eredete

Koopmans már Hollandiában is foglalkozott hajózási szállítással összefüggő gyakorlati problémákkal, s a háború alatt, az Egyesített Hajózási Bizottság keretében, szintén a hajók optimális hasznosításának feladatán dolgozott. Az általa kifejlesztett modell egy olyan *döntési feladat* volt, amelynek feltételeit lineáris egyenlőtlenségek alkották, és az optimalizálandó kifejezés (a célfüggvény) is lineáris volt (*Koopmans* [1942]). Koopmans ezzel az elsők között fogalmazott meg és oldott meg egy később *lineáris programozásnak* elnevezett optimalizálási feladatot.[4] Modelljének feltételei sajátosan egyszerűek voltak (szállítási feladat), és megoldása nem igényelt bonyolult, általánosabb algoritmust. Minden bizonnyal ekkor figyelt fel Koopmans az úgynevezett *potenciálok,* a Nobel-díjban vele osztozó *Kantorovics* [1939] szóhasználatában „objektívan meghatározott értékelések”, a mai elnevezéssel *árnyékárak* egy nevezetes tulajdonságára, éspedig arra, hogy felhasználhatók az optimális döntés megkeresésére a *decentralizált döntéshozatal* folyamatában.

A háború után megnőtt az érdeklődés az operációkutatási, különösen az erőforráselosztási (allokációs) modellek felhasználása iránt, ami arra ösztönözte Koopmanst, hogy összefoglalja és általánosítsa elért eredményeit. Ennek során került kapcsolatba a lineáris programozás, illetve a szimplex algoritmus kidolgozásán dolgozó Dantziggal, aki közvetlenül ismerte Neumann Jánost, és láthatóan tájékozottabb volt a lineáris közgazdasági modellek irodalmában és a bécsi iskola munkáiban. Dolgozatában Koopmans maga is elismeri ezt, illetve a tényt, hogy a Dantziggal folytatott konzultációi jelentősen segítették abban, hogy fokozatosan kibővítse modellje érvényességi körét és értelmezési lehetőségeit. Minden bizonnyal ennek is köszönhető, hogy dolgozata messze túlmutat az általa *tevékenységelemzésnek* elnevezett modellen.

Modellje valójában a termeléselmélet axiomatikus felépítésére irányuló kísérlet volt. A lineáris formák alkalmazását Koopmans csak matematikai kényelmi szempontokkal

[4] A *programozás* kifejezés Dantzigéktól (lásd például *Dantzig* [1951]) ered, akik eltérő időszakokban zajló, összefüggő műveletek optimális összehangolására és ütemezésére („programozására”) alkalmazták modelljüket.

indokolta. Lineáris összefüggések közelítésként való alkalmazása kezdettől jelen volt a közgazdaságtanban. Koopmans maga is utal modelljének közgazdasági előzményeire (Walras, Cassel, Wald, Leontief), és kiemeli közöttük *Neumann* [1937] nevezetes növekedési modelljét, amelyben először jelenik meg ikertermelést és technológiai választékot is megengedő lineáris technológia és a hatékony tevékenységek piaci egyensúlyi árakkal megegyező tulajdonságú árakkal való jellemzése. (Érdemes megjegyezni, hogy mind Neumannál, mind Koopmansnél kimutatható a termodinamikai hatás.)

A lineáris tevékenységelemzési modell *az állandó ráfordítási/kibocsátási együtthatókkal jellemzett termelési lehetőségek általános modellje*. A modell alapvető feltételezése, hogy egy és ugyanazon termék előállítására alternatív *eljárások* állhatnak rendelkezésre *(technológiai választék),* és egy-egy eljárás egyidejűleg több terméket állíthat elő *(ikertermelés)*. Ez a két jellemző különbözteti meg a Leontief nevéhez fűződő (és jóval ismertebb) lineáris input-output modellektől, amelyek esetében a termékek és eljárások kölcsönösen megfeleltethetők egymásnak.

A tevékenységelemzés modell alapfeltevései és építőelemei

A termelés korabeli közgazdaságtani ábrázolásában két jellegzetes megközelítéssel lehetett találkozni. Az egyik *állandó ráfordítási együtthatókat* feltételezett, éspedig oly módon, hogy *termékenként* adottnak feltételezte a felhasznált termelési tényezők arányait, az alkalmazott technikát. Ezt az utat követte Leontief is input-output modelljében, de előtte sokan mások (például Walras, Cassel) is éltek ezzel az egyszerű ábrázolási lehetőséggel. A termelés ilyen ábrázolása nem adott magyarázatot arra, hogy milyen megfontolások és döntések alakítják ki a „társadalmi normaként" kezelt ráfordítási együtthatókat. Még kevésbé adtak eligazítást abban a tekintetben, hogy miként lehetne megoldani az ikertermelésből fakadó (a ráfordítások termékek szerinti szétválasztása) és az eltérő hatékonyságú termelési folyamatok együttlétéből fakadó (aggregálási) elméleti problémákat.

A másik jellemző megközelítés a *termelési függvény* volt, amely azon a feltételezésen nyugszik, hogy a *termelési tényezők* (inputok) és az általuk előállítható *termékek* (outputok) mennyiségi viszonyát, technikailag lehetséges kombinációikat meg lehet adni (becsülni) „jól viselkedő" (analitikusan jól kezelhető) függvényekkel. A termelési függvényekről rendszerint feltesszük, hogy eleve csak *hatékony tevékenységeket* ábrázolnak. Itt is a háttérben marad azoknak folyamatoknak, döntéseknek az elemzése, amelyek a hatékony tevékenységeket kiszűrik, illetve azoknak a részfolyamatoknak az ábrázolása, amelyek együttes alkalmazásának eredőjeként kialakulnak az inputok és outputok lehetséges kombinációi az adott termelési egység szintjén.

Koopmans ezért joggal találhatta úgy, hogy a rendelkezésére álló korabeli termelési modellek elméleti szempontból nem kielégítők. A tevékenységelemzési modell a termelési függvények „kritikája". Koopmans hangsúlyozza, hogy termelési döntéseket meghozó vállalatvezetők, mérnökök számára idegen a termelési függvények tényezőinput-, termékoutput-szemlélete, ők diszkrét termelési folyamatokban gondolkoznak. A különböző termelési tényezők és termékek közötti arányok megváltozását (a helyettesítéseket vagy transzformációkat, amelyeket a termelési függvények ábrázolni kívánnak) az egyes részfolyamatok összetételében bekövetkező változások idézik elő, tehát egy termelési modellben ez utóbbiakból kell kiindulni.

Termeléselméletének és modelljének kidolgozása során Koopmans ügyelt arra, hogy szigorúan elválassza egymástól a termelés műszaki és gazdasági feltételeit. Az első csoport elemei a műszaki és szervezési szempontból lehetséges tevékenységeket, a *technológiát*, a másodiké pedig a közülük való *választás jellemzőit* (hatékonyság, optimalitás, gazdaságosság) határozzák meg. Másrészt, ragaszkodott a világos és tiszta fogalom- és feltevésrendszer bevezetéséhez. Nem véletlen, hogy bevezetett fogalmai nemcsak a konkrét lineáris tevékenységelemzési modellben voltak alkalmazhatók. Dolgozatával a statikus termelés- és egyensúlyelméletet, elsősorban a *termelési halmazok elméletét* is megalapozta.

Koopmans axiomatikus elméletében a *technológia* egy meghatározott *termelőegység* (üzem, vállalat, iparág, nemzetgazdaság stb.) műszaki-szervezési „receptkönyve". A termelést a különböző *javaknak* a folyamatba belépő (inputok, felhasználás) és az abból kilépő (output, kibocsátás) mennyiségével ábrázolja. A termelést egészen általánosan kell és lehet értelmezni, felölelve minden olyan folyamatot, amely adott javakat más használati értékű javakká alakít át. Ezért Koopmans a termelés helyett gyakran a transzformáció elnevezést használta: a *technológia* a *transzformációs lehetőségek* halmaza.

Egy technológia leírása tehát előfeltételezi, hogy ismerjük a vizsgált egység termelési tevékenységeiben előfordulható javakat, egy teljes és átfedésektől mentes *jószáglistát*. Egy és ugyanazon jószág különböző egységeit az elemzés szempontjából teljesen azonosaknak kell tekintenünk. Feltesszük, hogy minden jószág mennyisége önálló mértékegységgel, egyetlen valós számmal mérhető. Így n jószág esetén a különböző javak rendelkezésre álló, felhasznált vagy előállított mennyiségét egy-egy n elemű vektorral ábrázolhatjuk.

A termelés egy adott lehetséges megvalósulása az, amit Koopmans nyomán *termelési tevékenységnek* nevezünk. *Nettó ábrázolási mód* esetén egy adott tevékenység az n dimenziós jószágtér egy meghatározott $\mathbf{t}$ pontjával azonosítható. A $\mathbf{t}$ vektor elemei azt mutatják meg, hogy az adott tevékenység alkalmazása végső soron (nettó) mennyivel csökkenti vagy növeli az egyes gazdasági javak egyébként meglévő mennyiségét. A szokásos megállapodás szerint a $\mathbf{t}$ vektor pozitív eleme ($t_i > 0$) azt jelzi, hogy a termelőegység az i-edik jószág *nettó kibocsátója*, a negatív elem ($t_i < 0$) pedig hogy *nettó felhasználója*. A nulla elem ($t_i = 0$) vagy tisztán közbenső terméket, vagy a kérdéses tevékenységben egyáltalán nem szereplő jószágot jelöl. *Bruttó ábrázolási mód* esetén külön-külön megadjuk a termelési folyamatba belépő inputok ($\mathbf{x}$) és a kilépő outputok ($\mathbf{y}$) teljes mennyiségét (ahol értelemszerűen $\mathbf{t} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$).

Koopmans elméletében a termelési döntések elemzésének kiindulópontja a *technológiai* (transzformációs) *halmaz*. Ennek feltételezett ismerete a neoklasszikus termeléselmélet egy kritikus, sokak által bírált alapfeltevése. De ez a kritika nem vonatkoztatható Koopmans tevékenységelemzési modelljére. Koopmans ugyanis, gyakorlatias kiindulási pontot választva, az ismert, a már feltárt technológiai eljárásokból (elemi tevékenységekből) származtatja a technológiai halmazt. Az elemi tevékenységek által generált technológiai halmaz voltaképpen a valódi, teljességében még nem ismert technológiai halmaz adott időszaki közelítésének tekinthető.

Koopmans tehát nem elégszik meg a technológiai halmaz matematikai kényelmi szempontok által diktált tulajdonságainak posztulálásával, mint majd azt később sokan teszik a gazdaság elvont modelljeiben. Számszerűsítésre alkalmas, parametrikus formát választ, éspedig olyant, amelyet a konkrét gyakorlati alkalmazásokban korábban már használt. Ez lesz a tevékenységelemzés *lineáris modellje*. A modell lineáris jellegét matematikai kényelmi szempontokkal indokolja, a hangsúlyt a *tevékenységelemzésre* helyezi.

A tevékenységelemzési modell alapfeltevései a következők.

F1. feltevés. A műszaki-szervezési szempontból lehetséges tevékenységek megszámlálhatóan sok *elemi* (vagy *alap-*) *folyamat* ($j = 1, 2, \ldots$) eltérő szintű (intenzitású) kombináció révén állnak elő.

F2. feltevés. Az egyes tevékenységek *függetlenek a többitől* abban az értelemben, hogy együttes alkalmazásuk nem befolyásolja egymás ráfordításainak, illetve kibocsátásainak nagyságát. Ha tehát $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T$ és $\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$, akkor $\mathbf{t}_3 \in T$ szintén *(additivitás)*.

F3. feltevés. Az egyes *alapfolyamatok* alkalmazási *szintje* (intenzitása) egy-egy nemnegatív valós számmal ($x_j \geqq 0$) jellemezhető.

F4. feltevés. Egy adott tevékenység ráfordításainak és kibocsátásainak *arányos* változtatása révén újabb lehetséges tevékenységeket kapunk, azaz $k \cdot \mathbf{t} \in T$, valahányszor $\mathbf{t} \in T$ és k nemnegatív valós szám *(proporcionalitás, folytonos oszthatóság)*.

Az első feltevés adja meg a tevékenységelemzési modellek lényegét. Az F2. alapfeltevés, amely kizárja külső hatások (externáliák) fennállásnak lehetőségét, voltaképpen a jószáglista teljességére vonatkozó feltevést erősíti meg. Az extern hatások, mint tudjuk, általában tisztázatlan tulajdonú s piaccal nem rendelkező termelési tényezők figyelmen kívül hagyása esetén jelentkeznek. Ilyen értelemben elméletileg nem kifogásolható, de persze a gyakorlati alkalmazás tekintetében esetenként problémát okozhat.

Az F3. alapfeltevést elsősorban „matematikai kényelmi" szempontok indokolják, de már előrevetíti az „oszthatatlanságok" modellbeli kezelésének nehézségét. Már az F2. feltevés is a *konstans mérethozadék* irányába mutat. Ebből ugyanis az következik, hogy $k \cdot \mathbf{t} \in T$, valahányszor $\mathbf{t} \in T$ és k egy pozitív egész szám. Az F4. alapfeltevés ezt kiterjeszti minden valós szorzóra. Pontosabban, az F4. feltevés a *javak folytonos oszthatóságát* implikálja, és ez az, ami kizárja az elemzésből a növekvő mérethozadék legfontosabb forrásának, egyes erőforrások oszthatatlan voltának figyelembevételét.

Az F2. és az F4. feltevés együtt azt eredményezi, hogy a technológiai halmaz matematikai formája egy *konvex kúp* (kónusz) lesz, amely a *nem növekvő átváltási* (helyettesítési, termelékenységi, illetve transzformációs) *rátákkal* és *konstans mérethozadékkal* jellemzett technológiai halmazok általános formája. Ezt a konvex kúpot a jelen esetben az úgynevezett *alaptevékenységek* generálják. Az egyes alapeljárások *egységnyi szintje* ($x_j = 1$) s ezzel egyidejűleg az egységnyi szinthez tartozó, *elemi* vagy *alaptevékenységek* is önkényesen kijelölhetők. Az egyes javaknak a j-edik alaptevékenység által felhasznált, illetve előállított mennyiségeit $\mathbf{r}_j$, illetve $\mathbf{k}_j$ vektorokkal fogjuk jelölni, ahol $\mathbf{r}_j, \mathbf{k}_j \in R^n_+$. A legtöbbször megelégszünk a tevékenységek *nettó* eredményének, az $\mathbf{a}_j = \mathbf{k}_j - \mathbf{r}_j$ vektorok ábrázolásával, ahol $\mathbf{a}_j \in R^n$. Az alapfeltevésekből következően a technológiai halmazt a jelen esetben az elemi tevékenységek összes lehetséges nemnegatív lineáris kombinációi adják meg:

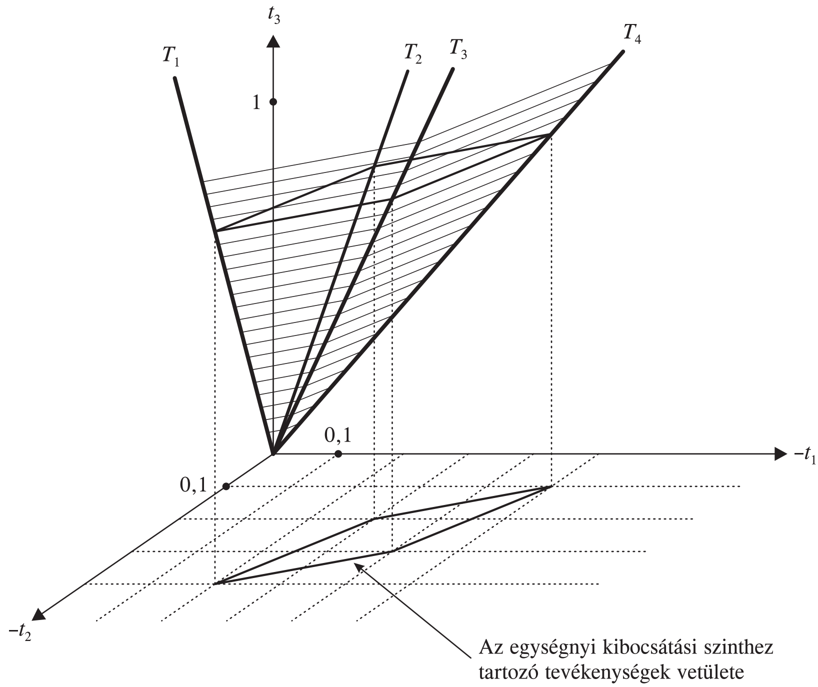
$$T = \{\mathbf{t}\colon \mathbf{t} = \mathbf{Ax},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}, \qquad \text{ahol} \quad \mathbf{Ax} = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot \mathbf{a}_j,$$

ahol $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_j)$ a *nettó kibocsátási együtthatók* $n \times m$*-es* mátrixa, $\mathbf{x}$ pedig a tevékenységszintek (m méretű) oszlopvektora. A kapott halmaz egy „szögletes", *polihedrikus* kúp, azaz egy gúla.

A négy elemi tevékenység által meghatározott technológiai halmazt az *1. ábrán* láthatjuk (egy origó-csúcspontú, végtelenbe nyúló, négyélű gúla).

A proporcionalitás és additivitás tulajdonsága csak a technológiai első fokú (lineáris) homogenitását (konstans volumenhozadékot) és nem növekvő átváltási rátákat implikál. Egy tevékenységelemzési modellnek azonban nem kell minden szempontból lineárisnak lennie. Homogén hagyományos termelési függvények segítségével, például, definiálhatunk nem lineáris tevékenységelemzési modelleket is, mint ezt a manapság használatos alkalmazott modellekben gyakran tesszük. Az egyenes szakaszokból összeálló szögletes, parciális átváltási görbék szakaszonkénti lineáris voltát a megszámlálhatóan sok, konstans együtthatós alaptevékenység létezésének feltevése hozza magával. Koopmans maga is felhívja a figyelmet arra, hogy minél nagyobb számú és egyenletesebben eloszló elemi tevékenységet veszünk figyelembe, annál jobban közelít a technológiai halmaz hatékony felülete (általános termelési függvény) egy hagyományos (folytonosan deriválható felszínekkel jellemzett) homogén termelési függvényhez.

1. ábra
A lineáris tevékenységelemzési modell technológiai halmaza: az elemi tevékenységek által kifeszített kúp



A műszaki szempontból hatékony tevékenységek és jellemzőik

Koopmans a fenti nettó szemléletű modell keretében definiálta és elemezte a hatékony tevékenységek nevezetes tulajdonságait, amelyek többsége a termelés általánosabb modelljeiben is érvényesnek bizonyult. A hatékonyság (efficiencia) klasszikus fogalmát a termelés körére szűkítve voltaképpen a *takarékosság elvéhez* jutunk. A termelésben akkor bánunk takarékosan a javakkal, ha olyan tevékenységeket választunk, amelyek az adott ráfordításokkal a legnagyobb kibocsátást eredményezik, illetve az adott kibocsátásokat a legkisebb ráfordításokkal teremtik elő.

Ennek értelmében egy $\mathbf{t}_1$ lehetséges tevékenységet pontosan akkor tekintünk *hatékonyabbnak* egy $\mathbf{t}_2$ lehetséges tevékenységnél, ha teljesül rájuk a $\mathbf{t}_1 \geq \mathbf{t}_2$ félig egyenlőtlenségi reláció,[5] azaz a $\mathbf{t}_1$ tevékenységnek legalább egy jószágból nagyobb a nettó kibocsátása, mint a $\mathbf{t}_2$ tevékenységnek, de a többiből sem kevesebb. A „*hatékonyabb*" reláció nem más, mint a matematikából jól ismert, vektorok közötti nagyságrendi reláció, s mint ilyen általában csak a tevékenységek *parciális rendezését* teszi lehetővé. A hatékonysági reláción alapul a *termelési hatékonyság* általánosan elfogadott definíciója, amelyet itt, szemben a hatékonyság *gazdasági* fogalmával, *műszaki hatékonyságnak* nevezünk.

[5] A félig egyenlőtlenségeket $\geq$ és $\leq$, a gyenge egyenlőtlenségeket $\geqq$ és $\leqq$ szimbólumokkal fogjuk jelölni a továbbiakban.

A hatékonyság első (műszaki) definíciója: egy $\mathbf{t}'$ lehetséges tevékenységet ($\mathbf{t}' \in T$) akkor nevezünk hatékonynak, ha nincs olyan $\mathbf{t} \in T$, hogy a $\mathbf{t} \geq \mathbf{t}'$ félig egyenlőtlenség reláció teljesül (azaz nincs nála hatékonyabb lehetséges tevékenység).

A termelők általában csak akkor választanak hatékony tevékenységet, ha valami arra kényszeríti őket, hogy minden jószággal takarékosan bánjanak, „gazdálkodjanak" velük. A közgazdászok ezt egy olyan alapvető gazdasági *lex minimi* követelménynek tekintik, amelynek az érvényesülését megkövetelik, sőt, elméleti modelljeikben gyakran eleve fel is teszik. Ezen alapul többek között a termelési függvény fogalma, amelyről rendszerint feltesszük, hogy csak a „hatékonyabb" reláció alapján *előzetesen megszűrt*, tehát műszaki szempontból hatékony tevékenységeket ábrázolnak. S emiatt nevezzük a technológiai halmaz hatékony felületét, a transzformációs határfelületet *általános termelési függvénynek*.

Koopmansnek azonban igaza van abban, hogy ez a szűrés csak elméleti lehetőség, a gyakorlat nemegyszer mást mutat. Egyrészről, a gyakorló szakember – a mérnök, a közgazdász – nem ismeri a termelési függvényt, nem ebben gondolkozik, hanem az ismert termelési eljárások közül válogat, gyakran azokat kombinálja. Másrészről, a döntéshozók alkalmazkodnak a konkrét gazdasági feltételekhez, és a számukra legjobb (optimális) tevékenység nem feltétlenül lesz a legtakarékosabb megoldás, legalábbis nem minden jószág tekintetében. Egyelőre azonban figyelmen kívül hagyjuk a konkrét gazdasági környezetet és döntési mechanizmusokat, és folytatjuk a műszaki tekintetben hatékony tevékenységek jellemzését.

Koopmans további elemzése a hatékony tevékenységek választására ösztönző úgynevezett *hatékonysági árak (efficiency prices)* bevezetésére és elemzésére irányult. Könnyű belátni, hogy piaci körülmények között a termelők feltételezett profitmaximalizáló magatartása kikényszeríti az általános takarékosságot, feltéve, hogy *minden jószág ára pozitív*. Egy nettó módon ábrázolt $\mathbf{t}$ tevékenység és adott $\mathbf{p}$ árak esetén a tevékenység *nyereségét* (a kibocsátások és ráfordítások értékének különbségét) a $\mathbf{pt}$ skaláris szorzat értéke adja meg. Ha tehát $\mathbf{p}$ minden elemében pozitív, és a $\mathbf{pt}$ kifejezés maximális értéket vesz fel a T technológiai halmaz egy adott pontjában, akkor az adott tevékenység szükségképpen hatékony (ha ugyanis lenne hatékonyabb tevékenység, annak nyeresége nagyobb lenne).

Ez általában igaz, tetszőleges módon adott technológia halmaz esetén. Koopmans viszont a kérdést fordítva is feltette. Vajon lehet-e olyan határozottan pozitív árakat találni, amelyek mellett egy adott hatékony tevékenység nyeresége a lehető legnagyobb lesz? Megmutatta, hogy a lineáris tevékenységelemzés által adott technológia esetén a fenti állítás *fordítva is igaz*: mindig találhatók ilyen határozottan pozitív árak. Ezeket az árakat nevezte első megközelítésben *hatékonysági áraknak*.

1. tétel (a műszaki szempontból hatékony tevékenységek létezésének feltételei). Egy $\mathbf{A}$ fajlagos ráfordítási-kibocsátási mátrix által definiált T technológiai halmazban egy $\mathbf{t}' = \mathbf{Ax}'$ tevékenység akkor és csak akkor hatékony, ha van olyan $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ *(hatékonysági) árvektor*, amely esetén $\mathbf{pt}' \geqq \mathbf{pt}$, $\forall \mathbf{t} \in T$, éspedig $\mathbf{pt}' = 0$, másképpen: $\mathbf{pA} \leqq \mathbf{0}$, és $\mathbf{pa}_j = 0$. ha $x_j' > 0$.

Teljesen természetes, hogy *konstans mérethozadékú technológia* esetén az egyensúlyban elérhető profit legnagyobb értéke csak nulla lehet (nonprofitfeltétel). Egyébként ugyanis a profit a végtelenségig növelhető lenne a tevékenységszintek arányos növelésével. Érdemes rámutatni arra is, hogy egy adott hatékony tevékenységet alkotó elemi tevékenységek szintén hatékonyak, mivel a kapott hatékonysági áron számított nyereségük szükségképpen nulla, azaz maximális.

Koopmans a konvex halmazok szeparációs tételei alapján végezte el a fenti állítás bizonyítását, amelyeknek a polihedrikus kúpokra való kiterjesztésében segítségére volt David Gale, aki később egy külön könyvet szentel a lineáris gazdasági modellekre vonatkozó tételeknek (*Gale* [1960]). A lineáris programozási feladatok dualitási tételeinek ismeretében a bizonyítás egyszerűbben is elvégezhető, s a későbbi bizonyítások előkészítéseképpen ezt meg is mutatjuk.

Vezessük be a bizonyításhoz a következő feladatot! Legyen $\mathbf{t}'$ lehetséges tevékenység egy előzetes termelési terv, és vizsgáljuk meg, lehet-e nála hatékonyabb $\mathbf{t} = \mathbf{Ax} \geq \mathbf{t}'$ tevékenységet találni! Jelöljük $\mathbf{z}$ (nemnegatív) vektorral a hatékonyságjavulás mértékét, ahol $\mathbf{z} = \mathbf{Ax} - \mathbf{t}'$! Tegyük fel, hogy az egyes inputok ($t_i' < 0$) tekintetében elért megtakarítást, illetve az outputok ($t_i' > 0$) esetében elért többletet w_i (pozitív) egységnyi prémiummal honorálják. A maximális prémiumot eredményező tevékenység az (LP1) lineáris programozási feladat megoldásával határozható meg.

Primális feladat	Duális feladat	
$\mathbf{x},\ \mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$	$\mathbf{p} \geqq \mathbf{0}$	
$-\mathbf{Ax} + \mathbf{z} \leqq -\mathbf{t}'$	$-\mathbf{pA} \geqq \mathbf{0}$	(LP1)
$\mathbf{wz} \to \max!$	$\mathbf{p} \geqq \mathbf{w}$	
	$-\mathbf{pt}' \to \min!$	

A $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ vektorok (ahol $\mathbf{t}' = \mathbf{Ax}'$) kielégítik a primális feladat feltételeit, tehát ezeknek létezik lehetséges megoldása. Optimális megoldása azonban csak akkor lehet, ha a célfüggvény korlátos, azaz nincs olyan lehetséges megoldás, amely esetén $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$. Az alábbi bizonyításban éppen azt használjuk ki, hogy $\mathbf{z}$ csak $\mathbf{0}$ lehet, valahányszor hatékony $\mathbf{t}'$.

Az 1. tétel bizonyítása. *Szükségesség*. Legyen $\mathbf{w}$ tetszőleges, de határozottan *pozitív* vektor, és tekintsük az (LP1) feladatpárt! Mivel $\mathbf{t}'$ hatékony, ezért a $\mathbf{t} \in T$, $\mathbf{t} \geqq \mathbf{t}'$ feltételeket csak $\mathbf{t}'$ elégítheti ki. Ebből adódóan a primális feladat $\mathbf{Ax} - \mathbf{z} \geqq \mathbf{t}'$, $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$ feltételeit kielégítő megoldásokban $\mathbf{z}$ értéke szükségképpen nulla. A $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ vektorok (ahol $\mathbf{t}' = \mathbf{Ax}'$) kielégítik ezeket a feltételeket, tehát ezeknek az egyenlőtlenségeknek létezik lehetséges megoldása. Mivel a lehetséges megoldásokban $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ szükségképpen, ezért minden lehetséges megoldás egyúttal optimális megoldás is, és a primális célfüggvény maximális értéke nulla. Ha a primális feladatnak van, akkor a duális feladatnak is létezik optimális megoldása, és a két feladat célfüggvényének optimális értéke ugyanakkora, esetünkben 0.

A duális feladat optimális megoldásában $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ (mivel $\mathbf{p} \geqq \mathbf{w} > \mathbf{0}$), $\mathbf{pt}' = 0$ és $\mathbf{pA} \leqq \mathbf{0}$. Mindezekből következően

$$\mathbf{pt} = \mathbf{pAx} \leqq 0 = \mathbf{pt}', \qquad \forall \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}.$$

Továbbá a lineáris programozás komplementaritási tételeiből tudjuk, hogy optimális megoldások esetén $\mathbf{pAx} = 0$, ezért $\mathbf{pa}_j = 0$, ha $x_j' > 0$. A $\mathbf{p}$ tehát a keresett tulajdonságú árvektor, amely létezése bizonyítandó volt.

Elégségesség. Közvetett úton bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ árak mellett a $\mathbf{t}' \in T$ tevékenység nyeresége maximális egy tetszőleges T technológiai halmaz felett, de $\mathbf{t}'$ nem hatékony, azaz van olyan $\mathbf{t} \in T$ tevékenység, amely esetén fennáll $\mathbf{t} \geq \mathbf{t}'$ félig szigorú egyenlőtlenség. Az utóbbi mindkét oldalát a pozitív $\mathbf{p}$ vektorral beszorozva, a $\mathbf{pt} > \mathbf{pt}'$ egyenlőtlenséghez jutunk, ami ellentmond a $\mathbf{t}'$ tevékenység feltett nyereségmaximáló voltának. A $\mathbf{t}'$ tehát szükségképpen hatékony. *q. e. d.*

Arról természetesen nem szól az 1. tétel, hogy léteznek-e – s milyen feltételek mellett – hatékony tevékenységek egy tetszőleges **A** együtthatómátrixszal adott technológiában. Koopmans megmutatta, hogy a lineáris tevékenységelemzési modell és általában *additív* technológiai halmazok esetén a hatékony tevékenységek létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy *ne keletkezhessen kibocsátás ráfordítás nélkül*, ami egyszersmind pontosan azt jelenti, hogy maga a tétlenség (is) hatékony tevékenység. Koopmans bevezette a tevékenységek *reverzibilitásának*, illetve *a technológia irreverzibilitásának* és *produktivitásának* a fogalmát is, és elemezte ezeknek a hatékonysággal való kapcsolatát, és mindezzel gyakorlatilag előkészítette a technológiai halmazok ma ismert általános elméletét.

Koopmans arra is felhívta a figyelmet, hogy a hatékonysági árarányok, ha egyértelműen meghatározottak, nem mások, mint a termelési függvények irodalmából ismert parciális *helyettesítési*, *transzformációs*, illetve *hozadéki (termelékenységi) határráták*, amelyek megmutatják, hogy az adott pont közelében valamely jószág nettó kibocsátásának kis egységnyi csökkentése egy másikénak hány egységnyi növelését teszi lehetővé. A termelési függvény szögletessége tehát nem szünteti meg a termelési tényezők és termékek között az átváltás (helyettesítés) lehetőségét, csak annak „simaságát". A ráfordítások és kibocsátások belső arányainak megváltozását, az átváltást *(trade-off)* az alapeljárások eltérő szintű kombinálása eredményezi.

Koopmans ennek kapcsán egy érzékletes és szellemes „átváltás" értelmezést is adott a hatékonysági áraknak, amely akkor is alkalmazható, ha az árarányok nem egyértelműek. Nevezetesen, egy adott hatékony tevékenységhez rendelhető hatékonysági árarányok olyan *cserearányok*, amelyek mellett *egyenértékű csere* révén sem lehet az adott tevékenység hatékonyságán javítani. (Vagyis az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{Ax} + \mathbf{z} \geqq \mathbf{t}' + \mathbf{y}$, $\mathbf{pz} \leqq 0$ egyenlőtlenségeknek nincs $\mathbf{y}$-ban félig pozitív megoldása. A nettó export $\mathbf{z}$ vektora ábrázolja a javak cseréjét, ahol a $\mathbf{pz}$ skaláris szorzat a kereskedelmi mérleg hiányát méri. Koopmans az egyenértékű csere lehetőségét kétszer $n - 1$ darab „seretevékenység" formájában vezette be, amelyekben egy kiemelt termékkel cserélhetnek el minden más terméket oda és vissza.)

A gazdasági környezet és a gazdasági hatékonyság jellemzői

Bár a manapság csak a termelési hatékonyság eddig tárgyalt értelmezésével találkozunk, Koopmansnél ez csak hatékonyság fogalmának első megközelítése, annak egy sajátos esete volt. Definíciója során csak a termelés műszaki jellemzőit vettük figyelembe, ezért is neveztük el *műszaki hatékonyságnak* (Koopmans nem használta ezt a megkülönböztetést). A technológia Koopmans-féle *a priori* modelljében a „javak" a termelési folyamat *fizikai-kémiai összetevőinek*, inputjainak és outputjainak felelnek meg. Ezekről azonban nem lehet, az általánosság megsértése nélkül, eleve feltenni, hogy mind olyan *gazdasági javak*, amelyekkel takarékoskodni kell.

Koopmans ezért továbblépett, és egy fokkal konkrétabb formában határozta meg és elemezte a termelés *hatékonyságának gazdasági* fogalmát. A hatékonyság további elemzésébe bekapcsolta a *gazdasági környezet* meghatározó elemeit. Több szempontból is tanulságos és érdekes az a mód, ahogyan Koopmans a gazdasági hatékonyságot definiálta és jellemezte az árak segítségével.

Koopmans a gazdasági hatékonyság *(efficiencia)* klasszikus, Pareto-féle értelmezéséből indult ki, abból eredeztette a termelési hatékonyság *(productive efficiency)* fogalmát és jellemzőit. A termelés hatékonyságának kritériumát ugyanakkor függetleníteni kívánta a javak végső elosztását szabályozó konkrét mechanizmusoktól és kritériumoktól. A *Pareto-hatékonyság* ugyanis – mint tudjuk – az erőforrások *lehetséges elosztásait* a háztartások kialakuló hasznossági szintjei tekintetében, a *haszonszint-lehetőségek* terében minősíti, az előzőkben tárgyalt, a vektorok nagyságrendjén alapuló részleges rendezés szabályai szerint. Koopmans viszont a termelést továbbra is csak a végeredménye, *a lehetséges nettó kibocsátások tekintetében* kívánta minősíteni a hatékonyság fogalmával, éspedig egy olyan *statikus* modellben, amelyben nincsenek időszakok (előző és következő sem), így nincs benne helye a felhalmozott állóeszközöknek sem.

A Pareto-hatékonyság fogalmából való kiindulás ugyanakkor megkövetelte, hogy bevezessen valamilyen minimális információt a háztartások preferenciarendezésére vonatkozóan. Ennek kapcsán mindössze annyit tett fel, hogy léteznek olyan *kívánt (desired) javak*, amelyek minél nagyobb mennyiségben való előállítása a termelés végső célja. Ezeket a javakat Koopmans *végtermékeknek (final goods)* nevezte, és definíciójukból fakadóan feltette, hogy ezekből a végső fogyasztók összessége telíthetetlen. Feltette továbbá, hogy léteznek olyan javak, amelyekből valamekkora adott mennyiség a termeléstől függetlenül is a gazdaság rendelkezésére áll. Ezeket *elsődleges erőforrásoknak* nevezte, és a gazdasági környezet egy további elemeként ezek *induló készleteit* is bekapcsolta az elemzésbe.

A közgazdászok az egyszerűség kedvéért gyakran felteszik, hogy a javakat pusztán műszaki jellemzőik alapján is *végtermékek* (csak kibocsátások), *közbenső termékek* (egyidejűleg kibocsátások és ráfordítások) és *elsődleges erőforrások* (csak ráfordítások) csoportjába lehet sorolni. Ezek a kategóriák azonban ritkán fordulnak elő ezekben a tiszta formájukban. Szinte minden jószágot reprodukálni lehet, s minél inkább aggregált jószágkategóriákat használunk, annál kevesebb lesz köztük tisztán közbenső jószág. Ezért is érdekes az a mód, ahogyan Koopmans a fentiektől eltérő értelmezést adott ezeknek a kategóriáknak.

a) Az *elsődleges erőforrások* nála olyan, potenciálisan akár újra is termelhető javak, amelyekből a gazdaság pozitív mennyiségű külső készletekkel rendelkezik. Koopmans nem zárta ki, hogy ezek között legyenek közvetlenül fogyasztásra is alkalmas *kívánt javak*. Az ilyen javakat mind az elsődleges erőforrások, mind a végtermékek között figyelembe lehet és kell venni, éspedig olyan tevékenységek bevezetése révén, amelyek az elsődleges erőforrásokat – pótlólagos ráfordítások nélkül – kívánt javakká, azaz végtermékekké alakítják át. Az elsődleges erőforrásokhoz tartozó együtthatók almátrixát $\mathbf{A}^e$-vel fogjuk jelölni.

b) A *végtermékek* olyan javak, amelyekre a végső fogyasztásban feltétlenül szükség van (kívánt javak), s ezért nettó kibocsátásuk nem lehet negatív. A telítődés lehetőségének kizárása következtében ugyanakkor a nettó kibocsátásuknak nincs felső korlátja. A végtermékekhez tartozó együtthatók almátrixát $\mathbf{A}^v$-vel jelöljük.

c) S végül, lehetnek olyan javak, amelyek nem kívántak, és nincs induló külső készletük sem, tehát sem nem végtermékek, sem nem elsődleges erőforrások. Koopmans ezeket *közbenső termékeknek* nevezte, és feltette, hogy ezek nettó kibocsátása csak nulla lehet. Ha tehát a végső felhasználásban keresett javak melléktermékeként a kelleténél több keletkezne valamely közbenső termékből, akkor ettől a feleslegtől meg kell szabadulni (lomtalanítás), ami költségekkel jár, így a közbenső termékek hatékonysági ára negatív is lehet. (Koopmans tehát nem élt a *díjmentes lomtalanítás* szokásos feltevésével, ami egy előremutató megoldás volt, hiszen a javak feleslegesen megtermelt mennyisége potenciálisan szennyezheti a környezetet.) Az utóbbi javak együtthatóinak almátrixát $\mathbf{A}^k$-val jelöljük.

A kívánt javak létezésének feltevése a részletesen nem ábrázolt fogyasztók viselkedésére vonatkozó posztulátum. Ennek alapján Koopmans a *kívánt javak alterét* választotta a *kritériumtérként*, amelyben a termelés hatékonysága értelmezhető és ellenőrizhető. Arrow és Debreu később, az általános egyensúly modelljében, konkrétabb formában definiálta a kívánt javakat, és egyidejűleg bevezette a *produktív* (termékeny) *javak* fogalmát is. Az utóbbiak olyan önmagukban nem kívánt elsődleges erőforrások, amelyek mindig szűkösek lesznek. A hatékonyság kritériumtere ezekkel a javakkal kibővíthető, sőt ki is bővítendő, amit Koopmans nem vett figyelembe. Mindenesetre mindebből látható, hogy Koopmans termelési modelljének jelentősége túlmutat a szűkebb értelemben vett termelési modellen. Dolgozata egy fontos közbenső lépés volt a vezetése alatt folyó munkálatokban, amelyek a termelési halmazok általános elméletének és az általános egyensúly modelljeinek kidolgozásában csúcsosodtak ki.

Tegyük most fel, hogy a javak listáját más szempontból nem kell felülvizsgálni. A *megvalósítható termelési tevékenységek halmaza* (M) a fentieknek megfelelően már nem maga a technológiai halmaz, hanem csak annak a következő feltételek által meghatározott részhalmaza:

$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$: a lehetséges tevékenységszintek vektora,

$\mathbf{A}^v\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$: a végtermékek nettó kibocsátásának korlátja,

$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$: a közbenső termékek nettó kibocsátásának korlátja,

$-\mathbf{A}^e\mathbf{x} \leqq \mathbf{s}$: az elsődleges erőforrások nettó kibocsátásának korlátja,

ahol $\mathbf{s} > \mathbf{0}$: az elsődleges erőforrások készletvektora, amelynek elemei akár tetszőlegesen nagyok is lehetnek. E feltételeket egybefogva a megvalósítható tevékenységek halmaza tehát a következő alakban írható fel:

$$M = \{\mathbf{t}\colon \mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{A}^v\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{0},\ -\mathbf{A}^e\mathbf{x} \leqq \mathbf{s},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}.$$

Vajon hogyan kell értelmezni a hatékonyság követelményét a kiegészített modellben? „Mivel csak a végtermékek nettó kibocsátásának a növekedése kívánatos önmagában …” (*Koopmans* [1951*a*] 79. o.), ezért Koopmans a hatékonysági kritériumát az utóbbiakra leszűkítve fogalmazza újra.

Definíciója csak a kívánt javak tekintetében írja elő a takarékoskodást: egy $\mathbf{t}$ megvalósítható tevékenység akkor és csak akkor *hatékonyabb gazdasági* szempontból egy szintén megvalósítható $\mathbf{t}'$ tevékenységnél, ha a $\mathbf{t}$ tevékenység nettó kibocsátása legalább egy kívánt jószágból nagyobb, mint a $\mathbf{t}'$ tevékenységé, de a többi kívánt jószágból sem kisebb.

Ebből adódik a termelés *gazdasági hatékonyságának definíciója*: egy $\mathbf{x}'$ szintvektorral adott, $\mathbf{t}' = \mathbf{A}\mathbf{x}'$ megvalósítható tevékenységet akkor tekintjük hatékonynak, ha nem létezik olyan $\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ megvalósítható tevékenység, amelynek esetében fennáll az $\mathbf{A}^v\mathbf{x} \geq \mathbf{A}^v\mathbf{x}'$ félig egyenlőtlenségi reláció.

A megvalósítható tevékenységek halmaza sohasem lesz üres, mivel az $\mathbf{s} > \mathbf{0}$ feltevés miatt a tétlenség ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{t} = \mathbf{0}$) mindig lehetséges tevékenység lesz. Ahhoz, hogy a tétlenség mellett létezzen más megvalósítható tevékenység is, ahhoz az szükséges, hogy az $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek létezzen nullától különböző (nem triviális) nemnegatív megoldása is. Ha van ilyen megoldása, akkor – mint azt Koopmans is megmutatta – a közbenső termékek eliminálásával *a modell* akár *redukálható* is a *végtermékek és elsődleges erőforrások terére*, ami a korábban tárgyalt modellek esetén, mondhatnánk ennek alapján, implicit feltevés volt.

A további kritikus kérdés az, hogy vannak-e olyan megvalósítható tevékenységek, amelyek esetén *minden*, illetve *csak néhány* végtermék nettó kibocsátása pozitív (*erős*, illetve gy*enge produktivitás*). A produktivitás fennállását valamelyik formában nyilván megköveteljük minden közgazdasági szempontból értelmes modelltől. Koopmans megmutatta, hogy *produktív technológia* esetén csak olyan tevékenység lehet hatékony, amely esetén legalább egy végtermék nettó kibocsátása pozitív.

A produktivitás azonban önmagában még nem garantálja, hogy léteznek hatékony tevékenységek. A hatékony tevékenységek létezésének az a szükséges és elégséges feltétele – bizonyította be Koopmans –, hogy a megvalósítható tevékenységek esetén egyetlen végtermékből se keletkezhessen pozitív nettó kibocsátás valamely elsődleges erőforrás felhasználása nélkül *(az elsődleges erőforrások nélkülözhetetlensége)*. Ezen állításokat rövidesen igazoljuk egy külön tételben, de előtte érdemes közelebbről megvilágítani ezek tartalmát.

Az utolsó feltevés *(az elsődleges erőforrások nélkülözhetetlensége)* szükségessége elég nyilvánvaló. Ha ugyanis létezne ilyen megvalósítható tevékenység, akkor annak tetszőleges többszöröse is megvalósítható, és egyúttal hatékonyabb tevékenység lenne. Ebből már az is könnyen belátható, hogy *legalább egy elsődleges erőforrás* korlátjának ki kell merülnie, ha egy hatékony tevékenység esetén valamely végtermék nettó kibocsátása pozitív. Mint ahogy az is nyilvánvaló, hogy *nem produktív technológia* esetén minden megvalósítható tevékenység hatékony, hiszen $\mathbf{A}^v\mathbf{x}$ csak a $\mathbf{0}$ vektor lehet ezek mindegyike esetén.

Koopmans ezen állításainak és későbbi tételeinek eredeti bizonyításai mai szemmel kissé körülményeseknek hatnak. A lineáris programozás dualitási tételeit felhasználva, állításait viszonylag egyszerűbben igazolhatjuk. Ez nem véletlen, hiszen mint látni fogjuk, Koopmans voltaképpen az utóbbiakat igazolta modelljének sajátos feltételei között.

2. tétel (a gazdasági szempontból hatékony tevékenységek létezésének feltételei). Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}$ együtthatók által adott lineáris tevékenységelemzési modellel definiált technológiában az *elsődleges erőforrások nélkülözhetetlenek*, és mindegyikük külső kínálata pozitív ($\mathbf{s} > \mathbf{0}$)! Az adott technológiában *léteznek* gazdasági szempontból *hatékony tevékenységek*, és ha a technológia *produktív*, akkor csak olyan tevékenység lehet hatékony, amely esetén *legalább egy* végtermék *nettó kibocsátása pozitív*, és *legalább egy* elsődleges *erőforrás szűkössé* válik.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ a végtermékekhez rendelt tetszőleges pozitív (átváltási súly- vagy ár-) vektor, és tekintsük az (LP2) lineáris programozási feladatpárt.

	Primális feladat	*Duális feladat*		
	$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$	$\mathbf{u}^v, \mathbf{u}^e \geqq \mathbf{0}$		
$(\mathbf{u}^v)$	$\mathbf{A}^v\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$	$\mathbf{u}^v\mathbf{A}^v + \mathbf{u}^k\mathbf{A}^k + \mathbf{u}^e\mathbf{A}^e \leqq -\mathbf{w}\mathbf{A}^v$	$(\mathbf{x})$	(LP2)
$(\mathbf{u}^k)$	$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$	$\mathbf{u}^e\mathbf{s} \rightarrow \min!$		
$(\mathbf{u}^e)$	$-\mathbf{A}^e\mathbf{x} \leqq \mathbf{s}$			
	$\mathbf{w}\mathbf{A}^v\mathbf{x} \rightarrow \max!$			

A sorok elején, illetve végén zárójelben az egyes feltételekhez rendelt kiegészítő változókat tüntettük fel. Emlékeztetünk továbbá arra, hogy az egyenlőség formájában előírt feltételek kiegészítő változóinak – esetünkben az $\mathbf{u}^k$ duális változóknak – az előjele bármilyen lehet.

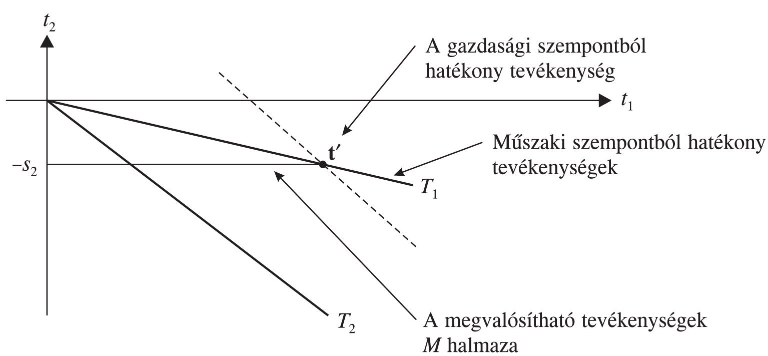
Egyszerűen belátható, hogy a *primális* feladat feltételeinek, amelyek nem mások, mint a *megvalósítható tevékenységek feltételei*, mindig van lehetséges megoldása (például a triviális $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, mivel $\mathbf{s} > \mathbf{0}$). Ha a technológia *nem produktív*, akkor a célfüggvény értéke minden lehetséges megoldásban 0, így tehát eleve korlátos. Ha viszont a technológia *produktív*, akkor vannak olyan lehetséges megoldások is, amelyek esetében az $\mathbf{A}^v\mathbf{x}$ vektor legalább egy eleme, és így a $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ feltevés következtében a célfüggvény értéke is pozitív. Az optimális megoldás is csak ilyen lehet. Bármilyen legyen is ezekben a megoldásokban az $\mathbf{x}$ vektor szerkezete, az $\mathbf{A}^e\mathbf{x}$ vektor legalább egy komponense negatív lesz, mivel nem keletkezhet végtermék elsődleges erőforrás felhasználása nélkül. Emiatt a célfüggvény értéke most is korlátos lesz, mivel növekedésének korlátot szab valamelyik elsődleges erőforrás véges rendelkezésre álló mennyisége. Mindezek következtében léteznek optimális megoldások.

Most megmutatjuk, hogy egy $\mathbf{x}^0$ optimális megoldás szükségképpen hatékony tevékenységet eredményez. Improduktív technológia esetén (nincs a tétlenségnél hatékonyabb megvalósítható tevékenység) ez egyszerűen következik abból, hogy $\mathbf{A}^v\mathbf{x} = \mathbf{0}$ minden lehetséges, így az optimális megoldásban is. Produktív technológia esetén pedig, ha nem lenne hatékony az optimális megoldásból nyert tevékenység, akkor létezne olyan $\mathbf{x}'$ lehetséges megoldás, amely mellett fennállna az $\mathbf{A}^v\mathbf{x}' \geq \mathbf{A}^v\mathbf{x}^0$ félig egyenlőtlenség. Ez azonban, a $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ feltevés következtében azt jelentené, hogy a célfüggvény értéke nagyobb lenne, mint az optimális megoldásban, ami ellentmondáshoz vezetne. *q. e. d.*

Hogyan értelmezzük a gazdasági szempontból hatékony tevékenységek választására ösztönző *hatékonysági árakat* a jelen esetben? Vajon lehet találni most is olyan árakat, amelyek mellett egy adott hatékony tevékenység nyeresége a lehető legnagyobb lesz? A gazdasági szempontból megvalósítható tevékenységek halmaza – szemben a műszaki szempontból lehetséges tevékenységek halmazával – korlátos lesz. Így találhatók olyan árak is, amelyek esetén a hatékony tevékenység maximális nyeresége pozitív lesz (a *2. ábrán* látható szaggatott vonal ilyen ráarányokat képvisel). Ilyen árak esetén az adott hatékony tevékenység nyeresége csak megvalósítható tevékenységek, és nem a teljes technológiai halmaz felett lesz maximális.

2. ábra

A megvalósítható tevékenységek halmaza és a gazdasági szempontból hatékony tevékenység



Koopmans láthatóan egy decentralizált, árak által koordinált gazdaságban gondolkozott, amelyben a termelők nem érzékelik az erőforráskorlátokat. Ezért a hatékonysági árak újraértelmezése kapcsán ragaszkodott ahhoz, hogy a *hatékonysági árak* legyenek továbbra is *kompatibilisak a technológiával*, a nyereség az összes lehetséges és ne csak a megvalósítható tevékenységek halmaza felett legyen maximális. A hatékony tevékenység nyeresége, a konstans volumenhozadék miatt, tehát nem lehet pozitív, a tétlenség lehetősége miatt viszont nem lehet negatív sem, vagyis a maximális nyereség csak nulla lehet: $\mathbf{pA} \leqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{pt}' = 0$. A hatékonysági ár tehát továbbra is az adott hatékony pontban a technológiai halmazhoz állított merőleges vektor (a kúp normálisa) lesz. (A *2. ábrán* látható esetben a keresett árarány sajátosan megegyezik a műszaki hatékonyságot jellemző hatékonysági áraránnyal, mert csak egy végtermék és egy szűkös erőforrás szerepel példánkban.)

A gazdasági hatékonyság esetén azonban már nem követelhetjük meg, hogy azok az árak, amely mellett az adott hatékony tevékenység nyereségmaximalizáló lesz, mind nemnegatívak, netán pozitívak legyenek. A közbenső termékek árának előjele, amelyek nettó kibocsátása kötött, tetszőleges lehet. Koopmans ugyanakkor továbbra is előírta, hogy a végtermék ára legyen pozitív, az elsődleges erőforrásoké pedig ne legyen negatív. A *gazdasági hatékonysági árakat* végül is a következőképpen definiálta.

A hatékonysági árak Koopmans-féle definíciója a gazdasági hatékonyság esetében: a $\mathbf{p}$ vektort akkor és csak akkor tekintjük egy $\mathbf{t}' \in M$, *gazdasági* szempontból hatékony tevékenységhez tartozó *hatékonysági árvektornak*, ha eleget tesz a következő feltételeknek:

1. $\mathbf{pA} \leqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{pt}' = 0$;
2. a *végtermékek* ára pozitív ($p_i^v > 0$);
3. a *közbenső termékek* árának az előjele tetszőleges;
4. az *elsődleges erőforrások* ára nemnegatív ($p_k^e \geqq 0$), de a hatékony tevékenység alkalmazása esetén nem teljesen kimerülő (szabad) erőforrások ára nulla ($p_k^e = 0$, ha $-t_k'^e < s_k$), azaz $p_k^e \geqq 0$, de $p_k^e(t_k'^e + s_k) = 0$.

Látható minőségi különbségek vannak a hatékonyság kétféle, műszaki és a gazdasági értelmezése, valamint a hozzájuk rendelhető hatékonysági árak között:

– a gazdasági szempontból *hatékony tevékenységek halmaza* normális körülmények között (ha van végső kibocsátás) – szemben a műszaki megfelelőjével – *korlátos*;

– az 1–4. feltételekkel definiált *hatékonysági árak* már *nem mind pozitívak*, csak a végtermékek ára. A többi jószág ára nulla, sőt a közbenső termékeké negatív is lehet;

– ha a közbenső termékektől el is tekintünk (lásd a redukált modellt), akkor az árak ugyan már mind nemnegatívak lesznek, de jellemzően lesznek olyan (szabad) elsődleges erőforrások, amelyek korlátja nem merül ki az adott hatékony tevékenység esetén, és ez utóbbiak ára nulla lesz;

– részben az utóbbiból is következik, hogy a gazdasági szempontból hatékony tevékenységek nem lesznek szükségképpen hatékonyak műszaki szempontból is.

A gazdasági szempontból hatékony tevékenységek és árak kapcsolata

Belátható – és rövidesen meg is mutatjuk –, hogy a hatékonysági árak definíciójában jelzett tulajdonságokat kielégítő $\mathbf{p} = (\mathbf{p}^v, \mathbf{p}^k, \mathbf{p}^e)$ árvektort kaphatunk az (LP2) duális feladatának optimális megoldásából a $\mathbf{p}^v = \mathbf{w} + \mathbf{u}^v$, $\mathbf{p}^k = \mathbf{u}^k$ és $\mathbf{p}^e = \mathbf{u}^e$ meghatározások révén. Előbb azonban nézzük meg a hatékony tevékenységek és a hatékonysági árak között fennálló kölcsönös összefüggés gazdasági hatékonyság esetében érvényesülő változatát, amelyet Koopmans a 3. tételben fogalmazott meg.

3. tétel (a gazdasági szempontból hatékony tevékenységek és árak összefüggése).

A) Egy $\mathbf{t}'$ megvalósítható tevékenység gazdasági hatékonyságának *szükséges és elégséges feltétele*, hogy létezzen olyan $\mathbf{p}$ *árvektor*, amely eleget tesz a *hatékonysági árakkal* szemben előírt 1–4. követelményeknek.

B) Továbbá ha a technológia *produktív*, akkor $\mathbf{p}^e\mathbf{s} > 0$, azaz legalább egy szűkös erőforrás hatékonysági ára szükségképpen pozitív.

Bizonyítás. *ad A) Elégségesség.* Tegyük fel, hogy a $\mathbf{p}$ árvektor és a $\mathbf{t}' = \mathbf{Ax}'$ megvalósítható tevékenység ($\mathbf{t}'^v \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{t}'^k = \mathbf{0}$ és $\mathbf{t}'^e \geqq -\mathbf{s}$) eleget tesz az 1–4. feltételeknek. Ha $\mathbf{t}'$ nem lenne hatékony, akkor létezne olyan $\mathbf{t} = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ megvalósítható tevékenység, amelynek a nettó kibocsátása legalább egy végtermékből nagyobb lenne, a többiből pedig nem kisebb, mint a $\mathbf{t}'$ tevékenységé, azaz $\mathbf{t}^v \geq \mathbf{t}'^v$, miközben $\mathbf{t}^k = \mathbf{0}$ és $\mathbf{t}^e \geqq -\mathbf{s}$. Mivel $\mathbf{p}^v$ pozitív és $\mathbf{p}^e$ nemnegatív, ezért $\mathbf{p}^v\mathbf{t}^v > \mathbf{p}^v\mathbf{t}'^v$ és $\mathbf{p}^e\mathbf{t}^e \geqq -\mathbf{p}^e\mathbf{s}$, ahol a 4. feltétel következtében: $-\mathbf{p}^e\mathbf{s} = \mathbf{p}^e\mathbf{t}'^e$, azaz $\mathbf{p}^e\mathbf{t}^e \geqq \mathbf{p}^e\mathbf{t}'^e$. Mindezek folytán

$$\mathbf{pt} = \mathbf{p}^{v}\mathbf{t}^{v} + \mathbf{p}^{e}\mathbf{t}^{e} > \mathbf{p}^{v}\mathbf{t}'^{v} + \mathbf{p}^{e}\mathbf{t}'^{e} = \mathbf{pt}' = 0,$$

azaz $\mathbf{pt} = \mathbf{pAx} > 0$, ami ellentmond a $\mathbf{pA} \leqq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ feltevésnek.

Szükségesség. Legyen $\mathbf{t}' = \mathbf{Ax}'$ gazdasági szempontból hatékony tevékenység, és tekintsük az (LP1) lineáris programozási feladatpár jelen esetre kiterjesztett (LP3) változatát:

	Primális feladat	*Duális feladat*		
	$\mathbf{x}, \mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$	$\mathbf{p}^{v}, \mathbf{p}^{e} \geqq \mathbf{0}$		
$(\mathbf{p}^{v})$	$\mathbf{A}^{v}\mathbf{x} - \mathbf{z} \geqq \mathbf{t}'^{v}$	$\mathbf{p}^{v}\mathbf{A}^{v} + \mathbf{p}^{k}\mathbf{A}^{k} + \mathbf{p}^{e}\mathbf{A}^{e} \leqq \mathbf{0}$	$(\mathbf{x})$	(LP3)
$(\mathbf{p}^{k})$	$\mathbf{A}^{k}\mathbf{x} = \mathbf{0}$	$\mathbf{p}^{v} \geqq \mathbf{w}$	$(\mathbf{z})$	
$(\mathbf{p}^{e})$	$-\mathbf{A}^{e}\mathbf{x} \leqq \mathbf{s}$	$\mathbf{p}^{e}\mathbf{s} - \mathbf{p}^{v}\mathbf{t}'^{v} \to \min!$		
	$\mathbf{wz} \to \max!$			

ahol $\mathbf{w}$ egy tetszőleges pozitív vektor (elemeit a végtermékek piaci árainak vagy a fogyasztói preferenciát jellemző súlyoknak tekinthetjük). Vegyük figyelembe, hogy $\mathbf{t}'$ feltételezett hatékonyságából adódóan a primális feladat lehetséges megoldásaiban $\mathbf{z}$ csak a $\mathbf{0}$ vektor lehet, és így a célfüggvény értéke csak nulla lehet. A primális feladatnak pedig van lehetséges megoldása, mivel az $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ és a $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ vektorok kielégítik a primális feladat feltételeit. Mivel a célfüggvényének értéke korlátos, ezért a primális feladatnak, és ebből következően a duálisnak is, létezik optimális megoldása.

Az árnyékárak tulajdonságai és $\mathbf{w}$ feltételezett pozitív volta alapján egyszerűen belátható, hogy a duális feladat optimális megoldásából kapott $\mathbf{p} = (\mathbf{p}^{v}, \mathbf{p}^{k}, \mathbf{p}^{e})$ vektor eleget tesz a $\mathbf{t}'$ tevékenységhez tartozó *hatékonysági árakkal* szemben támasztott követelményeknek, és mivel a két feladat célfüggvényének optimális értéke megegyezik egymással, azaz $\mathbf{wz} = \mathbf{p}^{e}\mathbf{s} - \mathbf{p}^{v}\mathbf{t}'^{v} = 0$, ezért $\mathbf{p}^{v}\mathbf{t}'^{v} = \mathbf{p}^{e}\mathbf{s}$.

ad B) Mindenekelőtt lássuk be, hogy a hatékonysági árak tulajdonságaiból fakadóan mindig fenn kell állnia a $\mathbf{p}^{v}\mathbf{t}'^{v} = \mathbf{p}^{e}\mathbf{s}$ egyenlőségnek, ugyanis, $\mathbf{pt}' = 0$, $\mathbf{t}'^{k} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{p}^{e}\mathbf{t}'^{e} = -\mathbf{p}^{e}\mathbf{s}$. Az előző tételben pedig igazoltuk, hogy *produktív* technológia esetén hatékony tevékenység csak olyan lehet, amelynek legalább egy végtermékből pozitív a nettó kibocsátása, azaz $\mathbf{t}'^{v} \geq \mathbf{0}$. Mivel $\mathbf{p}^{v} > \mathbf{0}$, ezért $\mathbf{p}^{v}\mathbf{t}'^{v} = \mathbf{p}^{e}\mathbf{s} > 0$, amiből már következik, hogy $\mathbf{p}^{e}$ legalább egy elemének pozitívnak kell lennie. *q. e. d.*

A 3. tétellel igazoltuk, hogy *a Koopmans-féle hatékonysági árak* valóban nem mások, mint egy alkalmasan megválasztott *lineáris programozási feladat* – éspedig az (LP3) feladat – *árnyékárai*. A gazdasági szempontból hatékony tevékenységek nem mások, mint azok a tevékenységek, amelyek valamilyen pozitív $\mathbf{w}$ árak mellett maximalizálják a végtermékek nettó kibocsátásának, a $\mathbf{wA}^{v}\mathbf{x}$ kifejezésnek az értékét a megvalósítható tevékenységek halmaza felett. A $\mathbf{w}$ vektor elemeit parametrikusan változtatva, elvben akár elő is állíthatjuk az összes hatékony tevékenységet és a hozzájuk rendelhető hatékonysági árakat.

Minderre már Koopmans is felfigyelt, és a gazdasági szempontból hatékony tevékenységek és árak meghatározása, illetve a lineáris programozásnak nevezett szélsőértékszámítási feladatok között fennálló kapcsolatot a 4. tételben fogalmazta meg és igazolta.

4. tétel (a gazdasági hatékonyság egy alternatív jellemzése). Egy $\mathbf{t}' = \mathbf{Ax}'$ tevékenység gazdasági hatékonyságának egy *szükséges és elégséges feltétele*, hogy létezzen a végtermékeknek egy olyan $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ *árvektora*, amely esetén a végtermékek nettó kibocsátásának árbevétele a $\mathbf{t}'$ tevékenység választása esetén maximális lesz a megvalósítható tevékenységek halmaza felett. Ha $\mathbf{w}$ egy ilyen vektor, akkor létezik olyan $\mathbf{p}$ hatékonysági árvektor, amely esetén $p_i^{v} \geqq w_i$, de $w_i = p_i^{v}$, ha $t_i'^{v} > 0$.

Bizonyítás. *Elégségesség.* Legyen $\mathbf{w}$ a végtermékek tételben megfogalmazott tulajdonságoknak eleget tevő árvektora, és a $\mathbf{wA}^{\mathrm{v}}\mathbf{x}$ kifejezés értéke vegye fel az $\mathbf{x}'$ pontban a maximumát a megvalósítható tevékenységek halmaza felett! $\mathbf{x}'$ tehát az (LP2) primális feladat optimális megoldása. Tekintsük most az (LP2) duális feladatának egy ehhez tartozó optimális megoldását, és képezzük a $\mathbf{p} = (\mathbf{p}^{\mathrm{v}}, \mathbf{p}^{\mathrm{k}}, \mathbf{p}^{\mathrm{e}})$ árvektort a következő szabályok szerint: $\mathbf{p}^{\mathrm{v}} = \mathbf{w} + \mathbf{u}^{\mathrm{v}}$, $\mathbf{p}^{\mathrm{k}} = \mathbf{u}^{\mathrm{k}}$ és $\mathbf{p}^{\mathrm{e}} = \mathbf{u}^{\mathrm{e}}$! A $\mathbf{p}^{\mathrm{v}}$ képzési szabálya következtében $\mathbf{p}^{\mathrm{v}} \geqq \mathbf{w}$. Az (LP2) feladat duális feltételét átrendezve, megkapjuk a $\mathbf{pA} \leqq \mathbf{0}$ egyenlőtlenséget, továbbá a komplementaritási követelmény miatt teljesül a $\mathbf{pt}' = \mathbf{pAx}' = 0$ követelmény is.

Szükségesség. Legyen $\mathbf{t}' = \mathbf{Ax}'$ egy tetszőleges hatékony tevékenység, és $\mathbf{p} = (\mathbf{p}^{\mathrm{v}}, \mathbf{p}^{\mathrm{k}}, \mathbf{p}^{\mathrm{e}})$ egy ehhez tartozó – például az (LP3) feladat megoldásából nyert – hatékonysági árvektor. Képezzük a $\mathbf{w}$ vektort a következő szabály szerint: $w_i = p_i^{\mathrm{v}}$, ha $t_i'^{\mathrm{v}} > 0$, $p_i^{\mathrm{v}} \geqq w_i > 0$ egyébként. Most megmutatjuk, hogy $\mathbf{x}'$, valamint az $\mathbf{u}^{\mathrm{v}} = \mathbf{p}^{\mathrm{v}} - \mathbf{w}$, $\mathbf{u}^{\mathrm{k}} = \mathbf{p}^{\mathrm{k}}$ és $\mathbf{u}^{\mathrm{e}} = \mathbf{p}^{\mathrm{e}}$ vektorok az (LP2) feladat optimális megoldásai. A $\mathbf{t}'$ vektor megvalósítható tevékenység, ezért az $\mathbf{x}'$ vektor az (LP2) primális feladatának lehetséges megoldása. Az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{w}$ vektorok pedig kielégítik az (LP2) duális feladatának feltételeit. A $\mathbf{p}^{\mathrm{e}}\mathbf{s} = \mathbf{p}^{\mathrm{v}}\mathbf{t}'^{\mathrm{v}}$ egyenlőség és $\mathbf{w}$ képzési szabálya következtében teljesül az $\mathbf{u}^{\mathrm{e}}\mathbf{s} = \mathbf{wA}^{\mathrm{v}}\mathbf{x}'$ egyenlőség is. A két feladat célfüggvényének értéke tehát egyenlő, ami igazolja, nemcsak lehetséges, hanem optimális megoldásokkal van dolgunk. *q. e. d.*

Érdemes röviden kitérni a $w_i < p_i^{\mathrm{v}}$ esetre, amely csak akkor fordulhat elő, ha az adott végtermék nettó kibocsátása (t_i^{v}) nulla. Hogyan értelmezhetjük ezt a helyzetet? A w_i a termék külső felhasználók által felajánlott ára, a p_i^{v} pedig a lehetőségköltsége (árnyékára) a termelő számára. A $w_i < p_i^{\mathrm{v}}$ reláció azt jelzi, hogy a termelők inkább az adott jószág külső beszerzésében, mint értékesítésében lennének érdekeltek. Ha ugyanis w_i áron vásárolhatnának az adott termékből, akkor növelhetnék nettó jövedelmüket. Az adott termék megvételének a lehetőségét viszont a $t_i'^{\mathrm{v}} \geqq 0$ feltétellel kizártuk.

Ugyanakkor, ha a technológia erősen produktív, és a hatékony tevékenységben $\mathbf{t}'^{\mathrm{v}} > \mathbf{0}$ (a fogyasztók minden végtermékből fogyasztanak valamennyit), akkor egyensúly csak olyan w_i árak mellett állhat elő, amelyek megegyeznek a termelők nyereségmaximalizáló magatartásával kompatibilis p_i^{v} hatékonysági árakkal. A p_i^{v} árak tehát a végtermékek *potenciális egyensúlyi árai*. Mindez arra hívja fel a figyelmet, milyen közel jutott Koopmans egy általános egyensúlyi modell megfogalmazásához és az egyensúly létezésének bizonyításához.

Rövidesen visszatérünk az általános versenyzői egyensúly és a termelés gazdasági hatékonyságának kapcsolatára. Előbb azonban szeretnénk rámutatni a hatékonysági árak Koopmans-féle definíciója 4. feltételében szereplő $p_k^{\mathrm{e}}(t_k'^{\mathrm{e}} + s_k) = 0$ *gyenge komplementaritási követelmény* egy kritikus pontjára. Nevezetesen, a feltétel ugyan kizárja, hogy egy nyilvánvalóan *szabad* elsődleges erőforrás ($t_k'^{\mathrm{e}} + s_k > 0$) hatékonysági ára pozitív legyen, de azt már nem, hogy egyes *szűkös erőforrások* ára ne legyen ugyancsak nulla. Így a kapott hatékonysági árak nem feltétlenül ösztönöznek minden szűkös erőforrással való takarékoskodásra.

Ennek kapcsán felmerül a kérdés, hogyan kell egyáltalán értelmeznünk a *szűkös elsődleges erőforrásokat* a jelen esetben. A műszaki hatékonyság esetében nincsenek egymástól különböző, hatékonyságuk tekintetében egymással egyenértékű tevékenységek.[6] Más a helyzet a gazdasági hatékonyság esetében. Itt már előfordulhat, hogy vannak olyan hatékony tevékenységek, amelyek a végtermékekből ugyanakkora nettó kibocsátást ered-

[6] A tevékenységvektorok minden komponensére alkalmazott „nem kevésbé hatékony” ($\geqq$) reláció antiszimmetrikus, azaz ha két vektor között mindkét irányban fennáll, akkor azok szükségképpen egyenlők egymással.

ményeznek, de eltérő elsődleges erőforrás (és esetleg közbenső termék) ráfordítással. Ilyen esetben az (LP3) primális feladatának több, egyaránt optimális megoldása létezik.

Az ilyen tevékenységeket a gazdasági hatékonyság Koopmans-féle definíciója szempontjából *egyenértékűeknek* kell tekintenünk egymással. Ezek között lehetnek olyanok, amelyek teljes mértékben kimerítik valamely erőforrás rendelkezésre álló készletét, míg mások ugyanabból az erőforrásból annál kevesebbet használnak fel. Az ilyen erőforrások nyilván nem tekinthetők szűköseknek, ezek hatékonysági árának még az olyan hatékony tevékenységek esetében is nullának kell lennie, amelyek alkalmazásakor a korlátjuk teljesen kimerül (az adott erőforrást pazarló módon veszik igénybe).

E gondolatmenet alapján a *szűkös és szabad elsődleges erőforrások definícióját* a következők szerint fogalmazhatjuk meg. A (kívánatos) végtermékekből ugyanakkora nettó kibocsátást eredményező, egymással egyenértékű hatékony tevékenységek szempontjából azok és csak *azok az elsődleges erőforrások szűkösek*, amelyek korlátja mindegyikük alkalmazása esetén kimerül, azaz a végtermékek jelzett vagy annál nagyobb nettó kibocsátását nem lehetne elérni, ha bármelyikük rendelkezésre álló készlete csökkenne. A nem szűkös *elsődleges erőforrások* az egymással egyenértékű hatékony tevékenységek adott osztálya szempontjából *szabad javak*.

Egy másik, a lineáris programozás irodalmában *degenerált* megoldásnak nevezett esetben pedig előfordulhat, hogy a primális feladat optimális megoldásában két vagy több erőforráskorlát merül ki egyidejűleg oly módon, hogy közülük egy kivételével a többit elhagyva a primális feladat optimális megoldásai változatlanok maradnak. Ilyen esetben az (LP3) duális feladatának létezik több, egyaránt optimális megoldása. Az úgynevezett *csúcsponti* megoldásokban az egyidejűleg kimerülő korlátok közül mindig csak egynek lesz pozitív az árnyékára. Mivel azonban az egyenként optimális megoldások tetszőleges konvex lineáris kombinációja szintén optimális megoldás, ezért mindig van olyan megoldás is, amelyben minden szűkös erőforráskorlát árnyékára pozitív (*erős komplementaritás*).

E megfigyelések alapján *Koopmans eredeti definícióját* valamivel *szigoríthatjuk*, és bevezetjük a *reguláris gazdasági hatékonysági árak* definícióját.

A $\mathbf{p}$ vektort pontosan akkor tekintjük egy $\mathbf{t}' \in M$, *gazdasági* szempontból hatékony tevékenységhez tartozó *reguláris hatékonysági árvektornak*, ha elemei eleget tesznek a gazdasági hatékonysági árakkal szemben támasztott 1–4. követelményeknek, de az utolsó feltételt a következő erős formában teljesítik:

4.′ a *szűkös elsődleges erőforrások* ára mind pozitív ($p_k^{\mathrm{e}} > 0$, ha $-t_k^e = s_k$ minden $\mathbf{t}'$-vel egyenértékűen hatékony tevékenység esetén), míg a *szabad elsődleges erőforrások* ára mind nulla ($p_k^{\mathrm{e}} = 0$, ha $-t_k < s_k$ a $\mathbf{t}'$ vagy valamely vele egyenértékűen hatékony tevékenység esetében).

A reguláris hatékonysági árak már nemcsak a kívánatos termékek, az eleve szűkösnek feltételezett javak, hanem a szűkössé váló erőforrásokkal is takarékosságra ösztönöznek, és ez valamelyest javít a hatékonysági árak közgazdasági értelmezési lehetőségén. Továbbra is értelmezési nehézséget okoz ugyanakkor, hogy számos, az adott megoldásban szabadnak mutatkozó elsődleges erőforrás potenciálisan szűkössé válhat. Részint azért, mert a technológia megengedi azok pazarló használatát, részint pedig a végső kereslet módosulása, illetve az alkalmazott eljárások ezt követő változása folytán. Ezt azonban az adott modell nem képes figyelembe venni.

A komplementaritási követelmények erős változatának definíciójához két rövid kiegészítő megjegyzés kívánkozik.

Nemlineáris optimalizálási (komplementaritási) feladatok esetén már nem mindig lehet találni olyan hatékonysági árrendszert, amelyben minden szűkös erőforrás árnyékára pozitív. Szinguláris esetekben egyes szűkös erőforrás árnyékára is csak nulla lehet.

Arrow és Debreu *a szűkös erőforrások egy másfajta definícióját* alkalmazta az általános egyensúly modelljében, ahol a *kívánt* javak (fogyasztási cikkek) mellett feltették, hogy létezhetnek *produktív* javak (szűkös termelési tényezők) is. Ezek olyan javak, amelyek külső forrásának növekedése – *ceteris paribus* – mindig lehetővé teszi a Pareto-hatékonyság javítását. Ez a mienktől eltérő, annál jóval erősebb feltevés biztosítja, hogy *produktív* javak, azaz a szűkös termelési tényezők egyensúlyi (árnyék-) ára csak pozitív lehet.[7]

Koopmans modellje és a mikroökonómia technológiai halmazai

Koopmans korábban vállalati szintű gyakorlati problémák, különösen szállítási feladatok megoldásával foglalkozott. Ez irányította a figyelmét az erőforrás-allokációs és optimalizálási feladatok felé, ez keltette fel az érdeklődését a feladatok megoldására alkalmas algoritmusok iránt. Teoretikus hajlama tapasztalatai általánosítására sarkallta, nyilván ezért fogott hozzá termeléselméletének és modelljének megfogalmazásához. Ennek fényében kicsit meglepő, hogy mégis nemzetgazdasági és nem vállalati szintű interpretációt választott modelljéhez.

Ez annál is érdekesebb, mert modellje tökéletesen megállja a helyét a mikroökonómia szokásos árelfogadó termelőjének döntési modelljeként is. Egy ilyen értelmezésben a *kívánt javak helyét* a piaci forgalomban részt vevő, pozitív piaci árakkal (**w**) rendelkező *áruk* veszik át. A közbenső termékek, illetve az elsődleges erőforrások pedig olyan, az adott vállalat termelésében felhasznált és/vagy keletkező egyéb javakként értelmezhetők, amelyeknek nincs piaca, nincs piaci ára.

Ebben az értelmezésben már nem kell feltennünk, hogy minden „kívánt” jószág vállalati nettó kibocsátása nemnegatív. Éppen ellenkezőleg, egy sor terméket a vállalat nem termel, hanem jellemzően a piacon szerzi be, azaz ezek nettó kibocsátása negatív (*termelési tényezők*), míg a vállalat profiljába eső *termékek* nettó kibocsátása pozitív. A megvalósítható tevékenységeknek a piaci forgalomban részt vevő árukra szűkített halmazát (vetületét) a fenti feltevéseknek megfelelően a következőképpen adhatjuk meg:

$$M^v = \{\mathbf{y} = \mathbf{A}^v\mathbf{x}\colon\ \mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{0},\ -\mathbf{A}^e\mathbf{x} \leqq \mathbf{s},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}.$$

Ezen M^v halmazt tekinthetjük a vállalat *mikroökonómiai* tankönyvekben szereplő *technológiai halmazának*. Ebben tehát az $\mathbf{A}^v\mathbf{x}$ vektornak jellemzően lesznek negatív elemei, a piaccal rendelkező javaknak már nincs árnyékára (csak piaci ára), a többi jószág *árnyékára* pedig a vállalaton belüli *belső elszámoló árakként*, a vállalati közbenső termékek, illetve az elsődleges erőforrások lehetőségköltségeként értelmezhető.

Az elsődleges erőforrások kapcsán a vállalat által monopolizált természeti tényezőkre, illetve termelési kapacitásokra gondolhatunk. Ezek korlátai magát a technológiai halmazt is korlátossá tehetik, ami *csökkenő hozadékhoz* vezet. Ilyen esetben a $\mathbf{w}\mathbf{A}^v\mathbf{x}$ pozitív is lehet, és az elért *nyereség* nem más, mint a szűkös erőforrások hozadéka. Ha nincsenek ilyen korlátos elsődleges erőforrások, akkor a mérethozadék a szűkített technológiai halmaz esetében is konstans, és ezért a *technológiával kompatibilis árak* esetében $\mathbf{w}\mathbf{A}^v \leqq \mathbf{0}$ lehet csak.

[7] Az utóbbi fogalom és az egyensúly létezésének bizonyításában betöltött szerepének részletes tárgyalása megtalálható *Zalai* [2000]-ben.

Termelési hatékonyság és általános egyensúly a lineáris tevékenységelemzési modellre épülő modellekben

A bizonyított tételek is jelzik már a gazdasági hatékonyság, illetve a hatékonyságot jellemző árak szoros kapcsolatát az általános egyensúllyal. Nézzük meg közelebbről, hogyan alakulnának az általános egyensúly feltételei egy olyan modellben, amelyben a termelési lehetőségek ábrázolására a Koopmans-féle lineáris tevékenységelemzési modellt vennénk igénybe! Ehhez az eddiginél konkrétabb formában kell ábrázolnunk a végső fogyasztói kereslet alakulását. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a háztartások kereslete leírható $y_i(\mathbf{p}^v, e)$ alakban adott *makrokeresleti függvényekkel*, ahol a jövedelem (e) az elsődleges erőforrások értéke által adott, $e = \mathbf{p}^e\mathbf{s}$.

A keresleti függvényekről *feltesszük* egyrészt, hogy *nulladfokon homogén* függvények (a kereslet nem változik, ha az árak és a jövedelem szintje egyforma arányban megváltozik). Feltesszük másrészt, hogy $\sum_i p_i^v y_i(\mathbf{p}^v, e) = e$ minden $\mathbf{p}^v$ és e esetén, ami a *telíthetetlenség* feltevésének a következménye, és biztosítja a $\mathbf{p}^v\mathbf{y}(\mathbf{p}^v, e) = \mathbf{p}^e\mathbf{s}$ egyenlőség, a *Walras-törvény* teljesülését.

A kereslet és a kínálat, illetve az árak egyensúlyi összefüggéseit e modell esetében csak komplementaritási megkötésekkel kiegészített gyenge egyenlőtlenségek alakjában fogalmazhatjuk meg. Nevezetesen, egyik oldalról megengedjük, hogy egyes javakból túlkínálat legyen egyensúly esetén is, de ez csak akkor fordulhat elő, ha az áruk már nulla (tovább már nem csökkenhet). Illetve másik oldalról nem kell minden tevékenység nyereségének maximálisnak (esetünkben nullának) lennie, de amelyeké nem az, azokat az egyensúlyban nem alkalmazhatják.

Az *általános egyensúly feltételeit*, ennek megfelelően, a következő formában adhatjuk meg a vizsgált gazdaság esetében.

A változók előjelére tett megkötések:

$$\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{p}^v,\ \mathbf{p}^e \geqq \mathbf{0}, \tag{E0}$$

Az egyensúly feltételei a termékek és az erőforrások piacain:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^v\mathbf{x} &\geqq \mathbf{y}, & \mathbf{p}^v\mathbf{A}^v\mathbf{x} &= \mathbf{p}^v\mathbf{y}, \\ \mathbf{A}^k\mathbf{x} &= \mathbf{0}, & & \\ -\mathbf{A}^e\mathbf{x} &\leqq \mathbf{s}, & -\mathbf{p}^e\mathbf{A}^e\mathbf{x} &= \mathbf{p}^e\mathbf{s}, \end{aligned} \tag{E1}$$

Az egyensúlyi árak további feltételei:

$$\mathbf{p}^v\mathbf{A}^v + \mathbf{p}^k\mathbf{A}^k + \mathbf{p}^e\mathbf{A}^e \leqq \mathbf{0}, \qquad (\mathbf{p}^v\mathbf{A}^v + \mathbf{p}^k\mathbf{A}^k + \mathbf{p}^e\mathbf{A}^e)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{E2}$$

A végtermékek keresletének egyensúlyi feltétele:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{p}^v, e) \qquad \text{és} \qquad e = \mathbf{p}^e\mathbf{s}. \tag{E3}$$

Az egyensúly szükséges feltételeiben szereplő változók és feltételek száma megegyezik egymással. Legalább egy feltétel azonban felesleges. Feltettük ugyanis a $\mathbf{p}^v\mathbf{y}(\mathbf{p}^v, e) = e = \mathbf{p}^e\mathbf{s}$ egyenlőségek (Walras-törvény) teljesülését. Ugyanakkor az (E1)–(E2) feltételekben megjelenő komplementaritási megkötésekből ugyancsak következik a Walras-törvény teljesülése, ugyanis

$$\mathbf{p}^v\mathbf{y} = \mathbf{p}^v\mathbf{A}^v\mathbf{x} = -\mathbf{p}^e\mathbf{A}^e\mathbf{x} = \mathbf{p}^e\mathbf{s}.$$

A jövedelmet definiáló $e = \mathbf{p}^e\mathbf{s}$ azonosság külön előírása ezért felesleges. Elhagyása esetén viszont a változók száma meghaladja a feltételek számát. Vegyük észre azonban, hogy az egyensúly feltételeinek teljesülése független az árak szintjétől, az utóbbi most is szabadon megválasztható. Ha pedig a *technológia produktív*, amit az értelmes megoldás létezése megkövetel és fel is teszünk, akkor az (E0)–(E2) feltételeket kielégítő megoldásokban $\mathbf{p}^v\mathbf{y} = \mathbf{p}^e\mathbf{s}$ szükségképpen pozitív. Ezért az árak szintjét normalizálhatjuk az $e = \mathbf{p}^e\mathbf{s} = 1$ kikötéssel. Az utolsó feltétel így kicserélhető az alábbival:[8]

A végtermékek keresletének egyensúlyi feltétele:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{p}^v). \tag{E3'}$$

Egyszerűen belátható, hogy feltevéseink mellett az általános egyensúlyban alkalmazott tevékenységek gazdasági szempontból hatékonyak (műszaki szempontból nem feltétlenül), a hozzájuk rendelt hatékonysági árak pedig potenciális egyensúlyi árak. Mindez kiolvasható a következő megállapításokból.

Megállapítás. Tegyük fel, hogy az *elsődleges erőforrások nélkülözhetetlenek*, $\mathbf{s} > \mathbf{0}$ és a technológia *produktív*, továbbá a fogyasztók egyetlen végtermékből sem telítődhetnek.

A) Ha létezik *egyensúly*, akkor az annak részét képező $\mathbf{t}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^*$ tevékenység *gazdasági szempontból hatékony*, és a $\mathbf{p}^*$ *egyensúlyi árak* hozzájuk rendelhető *hatékonysági árak*.

B) Ha $\mathbf{t}' = \mathbf{A}\mathbf{x}'$ *gazdasági szempontból hatékony* tevékenység, és $\mathbf{p}'$ egy hozzá tartozó *hatékonysági árvektor*, és történetesen $\mathbf{A}\mathbf{x}'^v = \mathbf{y}(\mathbf{p}'^v)$, akkor az $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{x}'^v$ és a $\mathbf{p}'$ vektorok együttese kielégíti az *általános egyensúly* (E0)–(E3′) feltételeit.

Ezeknek az állításoknak helyessége viszonylag könnyen belátható, ezért bizonyításukat nem is részletezzük. Alapvetően azt kell belátni, hogy az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ és $\mathbf{p}$ vektorok akkor és csak akkor elégítik ki az általános egyensúly (E0)–(E2) feltételeit, ha az (LP4) lineáris programozási feladat optimális megoldásai $\mathbf{w} = \mathbf{p}^v$ esetén.

	Primális feladat	*Duális feladat*		
	$\mathbf{x}, \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$	$\mathbf{p}^v, \mathbf{p}^e \geqq \mathbf{0}$		
$(\mathbf{p}^v)$	$\mathbf{A}^v\mathbf{x} \geqq \mathbf{y}$	$\mathbf{p}^v\mathbf{A}^v + \mathbf{p}^k\mathbf{A}^k + \mathbf{p}^e\mathbf{A}^e \leqq \mathbf{0}$	$(\mathbf{x})$	(LP4)
$(\mathbf{p}^k)$	$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$	$\mathbf{p}^v \geqq \mathbf{w}$	$(\mathbf{y})$	
$(\mathbf{p}^e)$	$-\mathbf{A}^e\mathbf{x} \leqq \mathbf{s}$	$\mathbf{p}^e\mathbf{s} \to \min!$		
	$\mathbf{w}\mathbf{y} \to \max!$			

Az (LP4) feladat nem más, mint az (LP3) feladat egyenértékű átfogalmazása. Mint az könnyen igazolható, a két feladat megoldásai között a kapcsolatot az $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}^v$ és a korábban már megismert $\mathbf{p}^v = \mathbf{w} + \mathbf{u}^v$, $\mathbf{p}^k = \mathbf{u}^k$, $\mathbf{p}^e = \mathbf{u}^e$ azonosságok teremtik meg. A feladat megoldásai – mint korábban igazoltuk – szükségképpen hatékonyak, és a kapott árnyékárak hatékonysági árak. Feltevéseink mellett a feladatnak minden pozitív $\mathbf{w}$ esetén létezik megoldása. S mivel feltettük, hogy a fogyasztók egyik végtermékből sem telítődhetnek, a $\mathbf{p}^v$ vektor egyensúlyi értéke szükségképpen pozitív.

Az általános egyensúly feltételeinek ily módon való felírása abból a szempontból is előnyös, hogy jelez egy lehetséges egyensúlykereső algoritmust. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az (LP4) lineáris programozási feladatnak minden pozitív $\mathbf{w}$ vektor esetén csak egyetlen $\mathbf{t}' = \mathbf{A}\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{x}'^v$ és $\mathbf{p}'$ megoldása van. A kapott $\mathbf{y}' = \mathbf{t}'^v$ vektor, a *végtermékek* adott $\mathbf{p}'$ árak mellett lehetséges *kínálata*, ugyanúgy a $\mathbf{w}$ árak függvénye, mint az $\mathbf{y}(\mathbf{w})$ *keresleti* vektor. Jelöljük ezért $\mathbf{t}'^v(\mathbf{w})$-vel!

Ha a kettő megegyezik egymással, akkor a $\mathbf{t}' = \mathbf{A}\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{x}'^v$ és $\mathbf{p}'$ vektorok együttese egyensúlyi megoldást alkotnak. Ugyanis, $p_i'^v \geqq w_i$ és a $p_i'^v > w_i$ reláció csak akkor állhat fent, ha $y_i(\mathbf{w}) = t_i'^v(\mathbf{w}) = 0$, vagyis az adott termék kereslete már a w_i ár mellett is nulla.

[8] Ugyanilyen formában redukálta Cassel is általános egyensúlyi modelljét. Cassel modelljében $\mathbf{A}^v = \mathbf{E}$, és nincsenek közbenső termékek ($\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$), továbbá $\mathbf{A}^e \leqq \mathbf{0}$.

Nyilván az marad a nála nagyobb p_i^v ár esetén is, azaz $y_i(\mathbf{w}) = y_i(\mathbf{p}'^v) = 0$. Ugyanakkor könnyen igazolható, hogy az $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$ és $\mathbf{p}'$ vektorok az (LP4) feladat megoldásai maradnak $\mathbf{w} = \mathbf{p}'^v$ árak esetén is. Az egyensúly keresését ily módon a végtermékek piacára redukálhatjuk. Olyan $\mathbf{w}$ árakat kell keresnünk, amelyek esetén $\mathbf{y}(\mathbf{w}) = \mathbf{t}'^v(\mathbf{w})$ lesz.

Ehhez természetesen először is egy megfelelő algoritmust kellene találnunk. Koopmans körvonalazott is egy lehetséges iteratív algoritmust, és felfigyelt arra, hogy modellje összekapcsolható decentralizált központi irányítás *Lange* [1938] és *Lerner* [1944] által vizsgált elméletével. A lineáris modellekre épülő konkrét decentralizált tervezési és irányítási (ösztönzési) mechanizmusokat végül is mások dolgozták ki, így például *Dantzig–Wolfe* [1960], illetve *Kornai–Lipták* [1965].

Hivatkozások

Arrow, K.–Debreu, G. [1954]: Existence of an equilibrium for a competitive economy. Econometrica, Vol. 22. No. 3. 265–290. o.

Dantzig, G. B. [1951]: The programming of interdependent activities: mathematical model. Megjelent: *Koopmans* [1951*b*] 19-32.

Dantzig, G. B.–Wolfe, P. [1960]: Decomposition principle for linear programs. Operations Research, Vol. 8. január–február, 101–111. o.

Debreu, G. [1991]: The Mathematization of Economic Theory. American Economic Review, Vol. 81. No. 1. 1–7. o.

Gale, D. [1951]: Convex polyhedral cones and linear inequalities. Megjelent: *Koopmans* [1951*b*] 287–297. o.

Gale, D. [1960]: The Theory of Linear Economic Models. McGraw–Hill, New York.

Gale, D.–Kuhn, H. W.–Tucker, A. W. [1951]: Linear programming and the theory of games. Megjelent: *Koopmans* [1951*b*] 298–0316. o.

Kantorovics L. V. [1939]: Matyematyicseszkije metodi organyizacii i planyirovanyija proizvodsztva. Izdanyije Lenyingradszkovo Goszudarsztvennovo Unyiverszityeta, Leningrád. Angolul megjelent: Kantorovich, L. V.: Mathematical methods of organizing and planning production. Management Science, Vol. 64. No. 6. 1960, 363–422. o.

Koopmans, T. C. [1942]: Exchange ratios between cargoes on various routes (non-refrigerating dry cargoes). Memorandum for the Combined Shipping Adjustment Board, Washington, DC. 1–12. o.

Koopmans, T. C. [1951*a*]: Analysis of production as an efficient combination of activities. Megjelent: *Koopmans* [1951*b*] 33–115. o.

Koopmans, T. C. (szerk.) [1951*b*]: Activity Analysis of Production and Allocation. Proceedings of a Conference, Cowles Commission Monograph, No. 13. John Wiley, New York.

Kornai János–Lipták Tamás [1965]: Two-level planning. Econometrica, Vol. 33. No. 1, 141–169. o.

McKenzie, L. [1954]: On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems. Econometrica, Vol. 22. 147–161. o.

Lange, O. [1938]: On the economic theory of socialism. Megjelent: *Lippincott, B. E.* (szerk.): *F. Taylor–O. Lange:* On the economic theory of socialism. University of Minnesota Press, Minneapolis, 57–142. o.

Lerner, A. P. [1944]: The Economics of Control. Macmillan. New York.

Neumann, J. von [1937/1965]: Az általános gazdasági egyensúly egy modellje. Megjelent: Neumann János: Válogatott előadások és tanulmányok. Fordította: *Augusztinovics Mária.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 160–176. o.

Neumann, J. von [1956/1965]: A legújabb tudományos fejlődés hatása a gazdaságra és a gazdaságtanra. Megjelent: Neumann János: Válogatott előadások és tanulmányok. Fordította: *Augusztinovics Mária.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 100–102. o.

Zalai Ernő [2000]: Matematikai közgazdaságtan. A korszerű mikroökonómiai elemzés klasszikus és neoklasszikus szemléletű modelljei. KJK–Kerszöv, Budapest.

Zalai Ernő [2005]: Tjalling C. Koopmans. Megjelent: *Bekker Zsuzsa* (szerk.): Nobel-díjasok a közgazdaságtanban. KJK–Kerszöv, Budapest, 201–218. o.