Közgazdasági Szemle, XLII. évf., 1995. 7-8. sz. (650-666. o.)

BRÓDY ANDRÁS

Bródy András az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos tanácsadója.

Növekedés, csõd és ciklusok

(A végtelen modell csonkítása és spektruma)

W. Leontief megalkotta a gazdasági növekedés végtelen lineáris modelljét. A számításokat azonban a modell véges szeletével végezzük. Ezt a véges részt többféleképpen is ki lehet választani. Az eredetileg publikált forma a gazdaság felszámolásának nyomvonalát adja meg. Ezért eltérõ megoldást javasolok. Ez másképpen csonkítja véges méretûvé a modell elméletileg kétszeresen is végtelen mátrixát. A kétfajta csonkítás a gazdasági csõd és a gazdasági növekedés két, egymástól jellegzetesen eltérõ pályáját adja. A növekedés teljes egyensúlya mindig csak a csonkítatlan, azaz végtelen mátrix megoldása lehet. Itt is felbukkan egy második, egyensúlyi, ámde csökkenõ pálya lehetõsége. Mindezért megkísérlem a modellt - R. Godwin elmélete alapján - a gazdasági ingadozás modellezésére is felhasználni. Ezzel mód nyílik a ciklusok idõtartamának és eloszlásának kiszámítására és a rendszer lehetséges mozgásformáinak egységes ábrázolására.[*]

W. Leontief pontosan kifejtette a dinamikus inverz legfõbb gazdasági eszméjét, alapvetõ struktúráját, logikai vázát és matematikai egyenleteit, valamint bemutatta átfogó számítási eredményeit az Egyesült Államok egy részletes modelljén. (LEONTIEF [1970].) A modell a minden évben ismétlõdõ, tehát elméletileg végtelen folyamatot írja le, amelynek során a gazdasági rendszer minden *k*adik évben elõállítja az abban az évben végsõ fogyasztásra kerülõ $\mathbf{y}_k$ javakat, az ehhez szükséges folyó ráfordításokat és gondoskodik a kapacitásokat növelõ beruházásokról is, hogy a következõ év termelését megalapozza.

A leírás a gazdaság már ismert dinamikus egyenletébõl indult ki. Ezt szintén Leontief állította fel a következõ formában (LEONTIEF [1953] 82-88. o.):

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k + \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k). \qquad (1)$$

Itt az **A** mátrix a folyó ráfordítások együtthatóiból alkotott mátrix, **B** a tõkelekötések mátrixa, **x** pedig a teljes termelések vektora. A zárójelben tehát a termelés kívánt növekedése áll, s az egyenlet azt mondja ki, hogy a teljes termelésnek fedeznie kell a végsõ fogyasztást, a folyó ráfordításokat és a növekedéshez szükséges beruházásokat.

Tudjuk, hogy ha a gazdaság *produktív*, tehát a folyó ráfordítások kisebbek, mint a kibocsátás, akkor **A** legnagyobb sajátértéke kisebb 1nél. Ekkor létezik és szigorúan pozitív $\mathbf{Q} = (\mathbf{1}-\mathbf{A})^{-1}$, az úgynevezett Leontiefinverz. Ha ezzel beszorozzuk az (1) egyenletet, akkor a következõ összefüggést nyerjük:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{Q}\mathbf{y}_k + \mathbf{Q}\mathbf{B}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k). \qquad (2)$$

Ha tehát adott az **y** végsõ fogyasztás és adott a kapacitások megkívánt növekedése, akkor kiszámítható az ehhez szükséges teljes termelés. Az persze külön vizsgálatot követel, hogy az adott évre már létrejötteke az ehhez szükséges kapacitások. Éppen ez a kérdés vezet a szomszédos évek vizsgálatához és az általánosabb ábrázoláshoz, amely biztosítani kívánja a megfelelõ kapacitásokat is a figyelembe vett évek teljes sorára. Megemlítendõ, hogy a (2) egyenletbõl kiszámítható az úgynevezett *zárt rendszer* egyensúlyi növekedési üteme és pályája is. Ekkor feltesszük azt, hogy **y** = 0, azaz nincsen külsõ vagyis "végsõ" fogyasztás.[1]

Nem tudunk azonban válaszolni arra a kérdésre, hogyan befolyásolja az $\mathbf{y}_k$ értékek valamely adott (*t=k, k+ 1,...*) *idõsora* az ehhez rendre szükséges évenként **x** teljes termeléseket. Minden új év egy új (1) alakú egyenletet hoz, de semelyiket sem lehet önmagában, a többitõl függetlenül megoldani, mivel mindegyik egyenlet tartalmazza a soron következõ év **x** teljes termelési szintjeit is. Nem tudjuk tehát biztosítani azt, hogy a számított értékek egy ellentmondásmentes, tehát megvalósítható termelési idõsort adjanak.

Ezt a feladatot oldotta meg Leontief, amikor felírta az (elméletileg mindkét irányban végtelen) hipermátrixot,[2] amely összeköti az egymással szomszédos éveket:

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & \mathbf{1-A+B} & \mathbf{-B} & & & \\ & & \mathbf{1-A+B} & \mathbf{-B} & & \\ & & & \mathbf{1-A+B} & & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{y}_{k-1} \\ \mathbf{y}_k \\ \mathbf{y}_{k+1} \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad (3)$$

E mátrix inverzének, az úgynevezett dinamikus inverznek létezését és kiszámításának módját az irodalom behatóan tárgyalta. Leontief eredeti levezetése bemutatta azt a végtelen hatványsort, amely az inverz minden sorában (és oszlopában) megjelenik. Megemlítette azt is, hogy e hatványsor bizonyos esetekben divergálhat, és meghatározta azt a kritikus pontot, amikor a mátrix átlójában álló **1-A + B** szingulárissá válik, és így lehetetlenné teszi az inverziót.

Az ilyen kétszeresen is végtelen mátrixnak a véges formáktól eltérõ sajátságai is vannak. Erre mutat a következõ két megfontolás. A végtelen hipermátrixnak végtelen hipersajátvektora a csupa egységmátrixból álló **e**=[..., **1**, **1**,..., **1**,...]^T összegezõ vektor. Ha beszorozzuk a fenti mátrixszal, akkor kiejtve a minden sorban pozitív és negatív elõjellel álló **B** mátrixokat, minden elemében csak az **1-A** mátrixszal szorzódik. Az **1-A** mátrix tehát a végtelen mátrix egyik hipersajátértéke, habár nem sajátértéke semmilyen véges szeletének. Ha tehát a végtelen hipermátrixnak van inverze, akkor ennek is sajátvektora marad a fenti összegezõ vektor. Ez a vektor az inverzben a hipersajátérték reciprokával, tehát a **Q** mátrixszal szorzódik. Ezért az inverz minden sorának (és minden oszlopának) összege **Q**.

Ez utóbbi sajátosságnak egyszerû gazdasági indoka van. A teljes ráfordítás mindig pontosan **Q**szoros. A hipermátrix a szükséges ráfordításokat csupán *elosztja* a különbözõ évekre, teljes összegét nem változtatja meg. Ezt a matematikai sajátosságot már Leontief részletesebben bizonyította.

A végtelen hipermátrix azonban szinguláris, bár minden véges szelete reguláris. Hipersajátértékei között ugyanis szerepel a zérusmátrix. A (2) egyenletbõl kiszámítható a zárt rendszer egyensúlyi növekedésének λ rátája. Ennek értéke a **QB** mátrix legnagyobb és mindig pozitív sajátértékének a reciproka. Szorozzuk most be rendre a növekedése ütem, $1 + \lambda$, egymásra következõ hatványaival a fenti végtelen összegezõ **e** hipervektor egyes egységmátrixait. Így olyan vektorhoz jutunk, amely ismét hipersajátvektor. De ez a vektor a beszorzás után minden sorban zérust ad eredményül, hiszen éppen ez a hosszú távú egyensúlyi megoldás feltétele, és ebbõl számítottuk ki λértékét. A végtelen hipermátrix tehát szinguláris, mert van zérus sajátértéke.

A gyakorlati számítások, amelyek mindig a végtelen mátrix egy véges szeletére vonatkoztak, jól konvergáltak. PETRI [1972] azt is bebizonyította, hogy az idõegység kis módosításával minden **1-A + B** alakú mátrix esetleges szingularitása megszüntethetõ. E mátrix inverze azonban nem biztosan pozitív. A negatív elemek felbukkanása gazdaságilag értelmezhetetlen. Létezésük azt jelenti, hogy valamiképpen lehetséges ravaszul *kevesebbet* termelve mégis *többet* fogyasztani, vagy (megfordítva) *kisebb* fogyasztás esetleg csak *nagyobb* termelés árán biztosítható. Mindkét eset ellentmond a józan észnek és minden eddigi gazdasági tapasztalatunknak.

Az a feladatunk hát, hogy közelebbrõl szemügyre vegyük ezt a kérdést, és indokokat találjunk arra, ha mégis el kell fogadnunk ezt az ellentmondást. Ha pedig oka valamely sajátos körülmény, akkor javítanunk kell a számítás menetén, hogy ne álljon elõ ilyen zavaró mozzanat.

A csonkításról

Mint matematikai problémát elméleti értelemben fel tudjuk fogni, meg tudjuk vizsgálni, sõt kezelni is tudjuk a végtelen mátrixokat. A számítógép azonban erre közvetlenül nem képes, mert memóriája véges. A tényleges számítás a végtelen mátrixnak mindig csak véges szeletét tudja a gépbe gyömöszölni. A sorok és oszlopok végtelen menetét meg kell csonkítani, mind a *kezdetén* (tehát a mátrix felsõ bal sarkában), mind a *végsõ* idõpontban (a jobb alsó sarokban). Csak így faraghatunk ki invertálható négyzetes mátrixot. Az adatok tényleges hiánya is korlátozhatja a számítás terjedelmét. Bár az elméleti helytállóság megkívánná a végtelen jövõbe nyúló fogyasztási idõsor megadását, mindig csak rövidebb, legfeljebb tíz vagy húszéves idõsort tudunk összeállítani.

Sok függ tehát a csonkítás tényleges kivitelezésétõl. Ha az átlóban álló ismétlõdõ **1-A + B** mátrixot önmagában invertáljuk, akkor ennek gyakorta lehetnek negatív elemei. Ha most a jobb alsó sarkot is erre az alakra csonkítjuk:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1-A+B} & \mathbf{-B} & & & \\ & \mathbf{1-A+B} & \mathbf{-B} & & \\ & & \mathbf{1-A+B} & \mathbf{-B} & \\ & & & \mathbf{1-A+B} & \mathbf{-B} \\ & & & & \mathbf{1-A+B} \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

akkor elkerülhetetlenek a további bonyodalmak. Miért? A negatív elõjelû **B** mátrixok, amelyek az átlóval párhuzamos következõ diagonálisban állnak, a következõ év szükséges ráfordításai. Másképpen nem volna elégséges kapacitás a szükséges tevékenységek elvégzésére. Ezekkel szemben állnak a pozitív elõjelû **B** mátrixok a fõátlóban. A pozitív elõjel azt jelenti, hogy ezek az adott évek kibocsátásai. A kétszeres szerepeltetés elméletileg nem kifogásolható. Neumann János találta ki, hogy így lehet ábrázolni azt az állótõkét, amely megmarad a termelési folyamatban, több idõszakaszra terjedõ élettartama alatt. Sraffa és az úgynevezett Economic Activity Analysis mûvelõi is kihasználták a matematikai tárgyalásnak ezt az elméleti lehetõségét a tõke korrekt ábrázolására.

Ez a matematikai leírás a tõkét sajátos *ikerterméknek* tekinti, amely csak abban különbözik az egyéb termékektõl, hogy eredeti helyén maradva kerül vissza a termelési folyamatba. Ez esetben, mint egy-egy év termékét, össze szabad vonni az adott év folyó ráfordításaival, illetve kibocsátásaival.[3] De ennek az alapjában szellemes és helyes ábrázolásmódnak következményei is vannak. Lehetetlenné teszi, hogy egyegy évet a többitõl elszigetelve kezeljünk. Figyelni kell arra, hogy ezeket a mesterséges "tõkefolyamokat", egymástól elszakíthatatlan ráfordítások és kibocsátások formájában együtt tartsuk. Mesterségesnek neveztük õket, mert a valóságban tõkeállagok és csak (elképzelt) év végi ki és ugyanakkor beáramlásuk teszi lehetõvé a sajátos matematikai leírást, azt tehát, hogy ráfordításként *is* és kibocsátásként *is* megjelenjenek.

A (4) egyenlet az elméletileg végtelen mátrix csonkításakor levágja az utolsó évhez tartozó negatív elõjelû **B** mátrixot. Ez a mátrix matematikailag már a következõ, a számításban figyelembe nem vett évhez tartozik. Ezért úgy véljük, hogy lehasíthatjuk és figyelmen kívül hagyhatjuk. Mivel azonban itt ikertermékekrõl van szó, a mátrixnak mindig együtt kellene maradnia ikrével. Ekkor, mint láttuk, ellentétes elõjelük révén általában kioltják egymás hatását, csupán átmeneti hatást hagyva hátra. A csonkítás miatt ez most lehetetlenné vált. Ezért van az, hogy az **1-A + B** mátrix, mivel maga is ilyen csonkítás eredménye, szingulárissá válhat, vagy inverzének negatív elemei lehetnek, tehát általában szólva "kellemetlenül" viselkedik.

Az eredeti (1) egyenletben csupán egyetlen **B** mátrix szerepelt, amely a termelési szintek növekedésével szorzódik. Csak a (3) egyenlet helyettesítette ezt a növekedést két egymásra következõ év teljes termelésével, amelyeket két (esetleg egymástól eltérõ, mert idõben is változó[4]) **B** mátrixszal kell megszorozni. A csonkítás folyamán azonban meggyilkoltuk a negatív elõjelû ikertestvért, amit a megmaradó pozitív elõjelû **B** drágán megtorol rajtunk. Elrontja (lefelé torzítja) a számított teljes termelési szinteket. Az utolsó évben ugyanis furcsán kirobbanó látszólagos kibocsátáshoz jutunk. Erre a rendszer, ha normálisan mûködik, semmi esetre sem képes. Ez a kibocsátás, **Bx**, nem kevesebb, és nem is más, mint a gazdaságba befektetett teljes tõke összege. Ezt nem tekinthetjük tiszta lelkiismerettel az utolsó év végsõ kibocsátásának. A szó szoros értelmében persze a rendszer valóban ezt adja át a következõ éveknek, a gazdaság jövõjének. De ez átadás, és nem kibocsátás. Nem egészen így gondoltuk a dolgot. Még ha el is döntjük, hogy a következõ évben abbahagyjuk a termelést (és általában felhagyunk minden gazdasági tevékenységgel), még akkor sem tudjuk eladni a piacon a gazdaság egész tõkéjét (és biztosan nem ebben az utolsó évben).

Összefoglalóan: ha így csonkítjuk a mátrixot, akkor egy olyan kérdésre kapunk választ, ami önmagában ugyan jogosult és értelmes, de semmiképpen sem azonos az eredetileg feltett kérdéssel. Eredeti kérdésünk az volt, hogy mi a teljes termelésnek az az idõsora, amely éppen az elõírt évi végsõ fogyasztásokat teszi lehetõvé. Magától értetõdõnek tekintettük, azért ki sem mondtuk, hogy a gazdaságnak mûködnie kell a számítás utolsó éve utáni idõszakban is. Semmiképpen sem akartuk a gazdasági rendszert tönkretenni, nem akartuk csõdbe kergetni vagy pusztulásig megcsapolni.

E helyett, a megadott csonkítással, a végsõ felszámolásba, teljes megszûnésbe kényszerített gazdaság termelésének idõsorát számítjuk ki. Ez a kérdés és a rá kapott válasz egyáltalában nem olyan abszurd, mint azt az éles fogalmazás mutatja. Sõt: a kérdés elméletileg igen fontos és érdekes. Nálunk bizonyára nem nélkülöz némi morbid aktualitást sem. De biztosan nem ez volt az a kérdés, amire Leontief eredetileg válaszolni akart.

Negyven éven keresztül megterveztük a beruházásokat. De ha egyszer megtervezzük az új kapacitások létrehozását, akkor nyilván meg kell tervezni a régi, elhasznált vagy elavulttá lett kapacitások felszámolását is. Ez azonban nem történt meg.[5] Ezért szakadt nyakunkba egyszerre a kilencvenes években a végsõkig halogatott, de a piacgazdaság körülményei közt tovább már nem halasztható feladat. Ezt a feladatot, mint az addigiakat is, politikailag és nem szakmailag kezelték, alighanem a kelleténél nagyobb veszteséget okozva. Ahogyan a beruházások gazdaságosságának meglehetõsen bonyolult, de szakmailag elég jól és részletesen kidolgozott módszertana van, hasonlóan a gazdasági tevékenységek beszüntetésének is léteznek szabályai. Mindkettõt jócskán elhanyagolták nálunk a gazdaság mindenkori vezetõi.

Itt mégis Leontief eredeti kérdésére keressük a választ. Hogyan módosítsuk tehát a csonkítás eljárását úgy, hogy a normális fejlõdés menete és ne a csõd menetrendje adódjon a számításokból? Sokféle változat javasolható, hiszen a számítás befejezte utáni évekre különféle feltételeket szabhatunk. Kiköthetnénk például, hogy a gazdaság, miután kielégítette az elõírt feltételeket, induljon tovább az egyensúlyi növekedés irányában. Vizsgálhatnánk azt is, hogy milyen speciális növekedési útvonal volna lehetséges és kívánatos a feladatok teljesítése után. Mindez azonban további feltevések modellezését, esetleg optimalizálását kívánná meg. Ez persze lehetséges, sõt éppen erre ad általános keretet a modell. Mégis itt bonyolítaná az alapvetõ probléma bemutatását, és valamilyen partikuláris megoldáshoz vezetne. Ezért a legegyszerûbb megoldást fogom bemutatni, mert ez teszi a tárgyalást, magyarázatot és a számpéldákat a legvilágosabbá.

Rendezzük be a számítás mátrixát a következõképpen:

$$\begin{bmatrix} 1-A+B & -B & & & \\ & 1-A+B & -B & & \\ & & 1-A+B & -B & \\ & & & 1-A+B & -B \\ & & & & 1-A \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Egyetlen és látszólag apró változtatás, hogy a jobb alsó sarokban elhagytuk a pozitív elõjelû **B** mátrixot. Mint a mátrixalgebrából tudjuk, ha az eredeti mátrix csökkent, akkor az inverze növekedni fog. S valóban az inverz jobb alsó sarkában az eddig esetleg negatív elemeket is tartalmazó mátrix helyett a mindig szigorúan pozitív **Q** mátrix fog állni. Tulajdonképpen, mint mindjárt számszerûen is bemutatjuk, csak ezzel tudunk eleget tenni a Leontief által elméletileg levezetett törvényszerûségnek, hogy az inverz *minden* sorának **Q** legyen az összege. Ezzel egyben elejét is vettük annak, hogy a fogyasztás valamilyen elemének csökkentése megnövelje a termelést. A dinamikus inverzzel való szorzás most már biztosan pozitív eredményt fog adni.

A tõkemátrix elhagyásával viszont nyilván elhanyagoltuk az utolsó évi beruházásokat, amelyek persze csak a következõ években fogják kifejteni kapacitásbõvítõ hatásukat. Tehát a javasolt és bemutatott módosítás elvileg még mindig pontatlan és elégtelen. Az utolsó évre "egyszerû újratermelést" feltételezve, elhagytuk a további növekedéshez szükséges beruházásokat.

Mi legyen hát a további növekedés szükséges ráfordításaival? Javaslatom az, hogy vegyük õket figyelembe az utolsó év végsõ fogyasztásának megfelelõ növelésével. Ez látszik a legegyszerûbb módszernek, hogy kikerüljünk a kátyúból. Nem kifogásolható elméletileg sem, mert ez a beruházás valóban végsõ, külsõ fogyasztás a számításmenet által felölelt évek szempontjából. Az új kapacitások, amiket ez a beruházás létrehoz, már csak a további, a számításban nem tárgyalt éveket szolgálja. A megoldás egyszerû, ráadásul csak kis változtatással jár. Mégis alapvetõen megváltoztatja a számított adatokat és általános trendjüket, mint ezt a következõ számpéldák mutatják.

Csõd és növekedés

Már egy ötéves láncolat megmutatja a két csonkítási eljárás sajátos eltérését. Összevont, csupán egyszektoros modellel számolunk. A számokat úgy választjuk meg hogy lehetõleg kerek számokat kapjunk. Ezért **A** = 0,8, tehát a mûködési többlet (operative surplus) hússzázalékos. Az inverz értéke tehát **Q** = 5, a végsõ fogyasztás ötszörösét kell megtermelni. Tegyük fel azt is, hogy a tõkeigényesség 1,8 évi termelésnek felel meg, azaz **B** = 1,8. A számok nem reálisak, mert így 11,1 százalékos az évi növekedés. A választást csupán a számításmenet áttekinthetõsége indokolja.

A csõdmátrix

$$\begin{bmatrix} 2 & -1{,}8 & & & \\ & 2 & -1{,}8 & & \\ & & 2 & 1{,}8 & \\ & & & 2 & -1{,}8 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

és inverze

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}45 & 0{,}405 & 0{,}3645 & 0{,}32805 \\ & 0{,}5 & 0{,}45 & 0{,}405 & 0{,}3645 \\ & & 0{,}5 & 0{,}45 & 0{,}405 \\ & & & 0{,}5 & 0{,}45 \\ & & & & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Az inverz fõátlójában mindenütt az **1-A + B** = 2 érték reciproka áll. A mátrix minden további eleme, akár az oszlop, akár a sor irányában haladunk tovább, elemenként mindig rendre 0,9del szorzódik. Ez a **B/(1-A+B)**, tehát az 1,8/2 értéknek felel meg, és a növekedési ütem reciproka. A normális növekedés inverze is hasonlóan alakul, csupán utolsó oszlopa eltérõ. A növekedési mátrix jobb alsó sarkában 2 helyett 0,2 áll, ennek reciproka 5. Ez az elõbbinek tízszerese, ezért az oszlop minden további eleme is az elõbbi tízszerese.

A növekedési mátrix és inverze

$$
\begin{bmatrix} 2 & -1{,}8 & & & \\ & 2 & -1{,}8 & & \\ & & 2 & -1{,}8 & \\ & & & 2 & -1{,}8 \\ & & & & 0{,}2 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}45 & 0{,}405 & 0{,}3645 & 3{,}2805 \\ & 0.5 & 0{,}45 & 0{,}405 & 3{,}645 \\ & & 0{,}5 & 0{,}45 & 4{,}05 \\ & & & 0{,}5 & 4{,}5 \\ & & & & 5 \end{bmatrix}
$$

Látjuk tehát, hogy a javasolt módosítás csak az inverz utolsó oszlopát érinti, a két inverz minden egyéb tekintetben azonos. A módosítás nem változtatja meg még az utolsó oszlop arányait és számításmódját sem.[6]

A két inverz hasonlósága azt a látszatot kelti, hogy a csonkítás talán még egyszerûbben is megoldható. Ha csak az utolsó oszlop tér el, akkor mégis egyszerûbb volna a mondjuk a 2000. évig tartó elemzést 2001ig kiszámítani, és aztán elhagyni az utolsó évét. Ez a megoldás azonban használhatatlan. Hasonlít ahhoz a tanácshoz, amely az utolsó vasúti kocsi rázkódását és lengését lekapcsolásával kívánja orvosolni. Akkor megint lesz egy utolsó kocsi, ami megint ráz, tehát azt is le kell kapcsolni, és így tovább, mindaddig, amíg a teljes szerelvény el nem fogyott. Az utolsó (és megváltoztatott) oszlop számértéke ugyanis már a számítás elsõ évének eredményeit is módosítja.

Világosan mutatják ezt az inverzek sorösszegei, amelyek öt éven keresztül évente egységnyi végsõ fogyasztást biztosítanak. A teljes évi termelések értékei ekkor a következõk:

Végső fogyasztás	1	1	1	1	1
Csőd	2,05	1,72	1,36	0.95	0,50
Növekedés[7]	5	5	5	5	5

A csõdhöz vezetõ megoldás tehát már az elsõ évben lényegesen kisebb teljes termelést kíván. A különbséget nyilván a tõke felélése fedezi, s ezután is egyre rohamosabban fogy a rendszer termelése. A növekedés (itt csak egyszerû újratermelés) útvonalán pedig mindig ötszörös, tehát pontosan **Q**-szoros termelésre van szükség, mint ezt már Leontief bizonyította. Összeállíthatunk azonban valóban növekedõ idõsort is, amely exponenciálisan bõvülõ végsõ fogyasztást biztosít. A közel egyensúlyi évi tízszázalékos ütem a következõ idõsorokat adja:

Végső fogyasztás	1	1,1	1,21	1,33	1,46
Csőd	2,45	2,17	1,80	1,32	0,73
Növekedés	6,77	6,97	7,13	7,25	7,32

Egyértelmû, hogy a feladat reális megoldását csak az utolsó sor adatai adhatják meg. A csõdmegoldás azonban igen érdekes elemzési szempontból, hiszen itt mindkét utolsó év teljes termelése már kisebb a végsõ fogyasztásnál is. A hatodik évre pedig a gazdaság szõröstülbõröstül elfogyott, eltûnt. Ezek a csõdöt jelzõ útvonalak kissé hasonlítanak a sokkterápiát szenvedett gazdaságok kezdeti nyomvonalaira. S nem árt itt arra sem figyelmeztetni, hogy minden túladóztatás és az ezzel járó túlelosztás elõbbutóbb elkerülhetetlenül ilyen tõkefelélõ kényszerpályára hajt minden gazdaságot.

Forduljunk azonban a normális folyamatok felé! Mint a fentiekbõl is látható, semelyik megoldás sem elégítheti ki szabatosan a hosszú távú egyensúlyi növekedés feltételeit. Sõt a rendszer semmilyen véges szelete (és ennek inverze) sem illeszkedik, és nem is illeszkedhet az igazi egyensúlyhoz. Csak a végtelen és így, szigorúan tekintve, csak közvetve kezelhetõ modell engedi meg a teljes egyensúly elméletileg szabatos megoldását, kiszámítását, a pálya megindítását és követését. S még akkor is, ez csak elméletileg számított, tehát adathibákkal terhes, ezért csak közelítõ és meglehetõsen torzított képet adhat a valódi egyensúlyi fejlõdésrõl.

Az igazi kérdés ilyen körülmények között inkább az, hogyan képes valamely adott és valóságos gazdasági rendszer egyáltalán az egyensúly közelében maradni, ha ezt az egyensúlyt sohasem tudjuk sem közvetlenül megfigyelni, sem megvalósítani, sem pedig pontosabban kiszámítani. Mégis azt tapasztaljuk, hogy a fejlett gazdaságok mindig csak néhány százalékkal térnek el közelítõleg kiszámítható és gyakran ki is számított egyensúlyi pályájuktól. Ha pedig egy rendetlen, válságos és kiegyensúlyozatlan gazdaságot vizsgálunk, még akkor sem nagyobb a mennyiségek relatív eltérése, mint húszharminc százalék, s ennél nagyobb eltávolodást csak egyes árak, bérek vagy fizetések esetében tapasztalhatunk, s akkor sem gyakran. S még mindezek a gazdaságilag már igen kártékonynak bizonyuló erõteljes eltérések is beleférnek a matematikai gondolkodás és elmélet számára az egyensúly közelében lefolyó kis perturbációk gondolatkörébe.

Ciklusok

Belátva a gazdaság bizonytalan voltát, ahol megvalósult harmóniát, a részek szabatos egyensúlyát hiába is keresnénk, vizsgáljuk meg, hogyan képes a gazdaság mégis megbirkózni az állandóan felmerülõ kisebbnagyobb eltérésekkel. A vizsgálat tárgya tehát most az, hogy ha az elõbbiekben tárgyalt egyenletek a gyakorlatban nem teljesülnek, azaz *egyenlõtlenségekké* válnak, akkor az eltérések hogyan fogják meghatározni a rendszer tényleges pályáját. Kísérletet teszünk a gazdaság valóságos mozgásának felrajzolására, nem elégedve meg elméleti egyensúlyi állapotok egymásutánjával.

GOODWIN [1952] szellemes és egyszerû modellt alkotott az egyenlõtlenség hatására kialakuló gazdasági reakciók leírására. Gondolata a késõbbiekben is rendkívül termékenynek bizonyult, és a gazdasági rendszerek lehetséges mozgásformáit vizsgáló matematikai elmélet egyik alappillére. A szabályozás hatásláncolatának kialakulását, mint õ is tette, az egyszerû újratermelés modelljén lehet a legvilágosabban bemutatni. Induljunk ki tehát a Leontief féle modell zárt és statikus változatából! Ez az önmagát minden évben eredeti formájában helyreállító gazdaság leírása. Egyenletei szimplák. A tõkeállag változatlan. Ezért csupán az éves folyó ráfordítások **A** mátrixára van szükség. A rendszer teljes egyensúlyát két, egymással duális kapcsolatban lévõ egyenlet fogalmazza meg:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{és} \quad \mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T\mathbf{A}. \qquad (6)$$

Itt $\mathbf{p}^T$ az egyensúlyi árak sorvektora. A képletek burkoltan kimondják az egyensúly fennállásának egy harmadik feltételét is: a növekedési ráta, λ értéke zérus. Ez a ráta csak akkor lehet zérus, ha az **1-A** mátrix szinguláris. Másképpen kifejezve: **A** legnagyobb sajátértéke egységnyi. Az egyensúlyi árak és mennyiségek pedig **A** bal és jobb oldali sajátvektorai.

Mi történik most, ha a termelés, **x,** nem egyenlõ az ehhez szükséges **Ax** felhasználással? És mi a következménye annak, ha az árak kisebbek vagy nagyobbak a költségeknél? Goodwin a klasszikusok ismert tételeihez fordul, Adam Smith megállapításait írja fel legegyszerûbb matematikai alakjukban: a túlkereslet áremelkedéshez vezet; a magas ár ösztönzi a termelést. Az ennek megfelelõ két differenciálegyenlet (az idõ szerinti deriválást a változó pontozásával jelezve):

$$\dot{\mathbf{p}} = (\mathbf{A} - \mathbf{1})\mathbf{x} \quad \text{és} \quad \dot{\mathbf{x}}^T = \mathbf{p}^T(\mathbf{1} - \mathbf{A}). \qquad (7)$$

A két egyenletet összefûzve a másodfokú differenciálegyenlethez[8] jutunk, akár az árak, akár a mennyiségek mozgását fejezzük ki. Vezessük be az **1-A = C** jelölést hogy a végsõ mátrix szerkezete világosan kitûnjön. Kiindulva a termelés második deriváltjából,

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}^T\dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{x},$$

Írhatjuk tehát, hogy

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = 0. \qquad (8)$$

Az önmaga transzponáltjával szorzott **C** mátrix úgynevezett Gramféle szimmetrikus forma. Az ilyen mátrixnak minden sajátértéke valós. A mátrix ezenkívül szemidefinit, azaz csak zérus és pozitív sajátértékei lehetnek. Van vagy lehet tehát egy egyensúlyi **x** vektor, amely a zérus sajátértékhez tartozik, összes deriváltja zérus. Ez a vektor egy konstans értékû nyomvonalat ír le.

A (8) egyenletnek ezenkívül csupán különbözõ frekvenciákkal rezgõ, tehát ciklikus megoldásai léteznek. Negatív számból vont négyzetgyök tisztán képzetes számhoz vezet. Az így nyert $e^{i\Omega t}$ alakú megoldások (ahol Ω^2 a fenti Grammátrix valamely pozitív sajátértéke) egyegy lehetséges gazdasági ciklust írnak le. A ciklus hosszát a $T=2\pi/\Omega$ képletbõl számítjuk.

Goodwin klasszikus logikával felállított egyenletrendszere jól magyarázza a ciklusok létrejöttének okát és elkerülhetetlenségét. Kevésbé meggyõzõ azonban a kapott számszerû eredmények tekintetében. A fenti Gramféle mátrix valamennyi zérustól különbözõ sajátértéke ugyanis közel egységnyi, mert az **A** mátrix második és további sajátértékei igen kicsinyek. Ezért aztán a Gramféle mátrix sajátértékeinek négyzetgyökei is közel lesznek 1hez. A kapott ciklusok hossza így zömében 6 év körüli, s ez a hossz nem felel meg a tapasztalatoknak. Az irodalomból fõként a készletek mozgásának 4-5 éves ciklusait, a 10-12 éves beruházási ciklusokat, a 20-25 éves hosszú vagy generációs ciklusokat és a 45-60 éves Kondratyevhullámokat ismerjük. Ezeknek pedig egyike sem jelent meg Goodwin modelljében.

Egy húsz évvel késõbbi dolgozatban (BRÓDY [1972]) ezért megkíséreltem Goodwin elmélete alapján a zárt dinamikus modell, tehát a $\mathbf{C} = \mathbf{1} - \mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$ mátrix adta ciklushosszakat kiszámítani. A kapott frekvenciák már valamivel reálisabbnak mutatkoztak. A vizsgált hétszektoros modellt ezért illeszteni lehetett az Egyesült Államok 1958-1968. évi idõsoraihoz is. Jelentkezett benne az ismert beruházási ciklus is, de a számított nyomvonal még mindig túl simának és "szépnek" bizonyult. Semmiképpen sem hasonlított a tényleges gazdasági rendszer tényleges adatainak képéhez. Túlságosan is egyszerû volt az elméleti pálya, hiányzott belõle a gazdaságstatisztikai adatsorok ismeretlen véletlen vagy kaotikus jellegû bizonytalansága, fluktuációja.

A végtelen dinamikus mátrix ismeretében most kísérletet lehet tenni a gazdasági ciklusok teljes spektrumának vizsgálatára. A gazdasági rendszert tehát végtelennek tekintjük, persze csak abban az értelemben, hogy nem korlátozzuk a gazdasági tevékenység idõbeli lefolyását. Azaz nem végtelen számú terméket tételezünk fel, sõt ismét csak az egyetlen szektorra összevont gazdaságot tekintjük. Ebben a (talán túlzott) egyszerûsítésben arra a megfigyelésre támaszkodom, hogy egy nagy nem negatív mátrixnak csak sok kicsi és zérushoz közelálló sajátértéke van a legnagyobb és domináns sajátértéken kívül. Úgy látom, hogy ezeknek a kis, változó és csak pontatlanul megállapítható sajátértékeknek nincsen és elméletileg nem is lehet fontos szerepük a tapasztalható ciklusok kialakításában. Ez a sajátosság már az eredeti Goodwinmodell számszerû eredményeibõl is kitûnik.

Most azonban az elõbbinél megbízhatóbb és elfogadhatóbb számértékeket kell választanunk a modell felállításához. A profitrés (mûködési többlet, operatíve surplus, tehát a teljes gazdasági forgalom egységére jutó nyereség vagy tiszta jövedelem) a mai fejlett gazdaságokban átlagosan tíz százalék.[9] Ez persze nem szilárd arány, mert körülbelül pluszmínusz harminc százalékos relatív ingadozást tapasztalható a szélsõ 0,7 és 0,13 értékek közt. Az átlaggal fogunk számolni, hiszen itt elsõsorban csak a nagyságrendek megállapítása a célunk és az, hogy a ciklusok lehetséges eloszlására vonatkozó támpontokat kapjunk.

A kiinduló adatok szokásos eltérésének és bizonytalanságának hatását majd a számítás elvégzése után vesszük figyelembe. Az összevont folyó ráfordítási mátrixot tehát az ennek megfelelõ skalárral vesszük számításba. Ezért **A** = 0,9 és **C** = **1-A** = 0,1 értékû. A tõkeigényesség, **B**, tehát a tõke/termelés hányados mintegy háromévi jövedelem lekötését jelzi, azaz **B** = 3. Ennek relatív ingadozása is hasonló az elõbbi értékhez. E két érték 3,3 százalékos egyensúlyi növekedési rátát eredményez, és ez elég közeli a korunkban tapasztalt tényleges hosszú távú, szekuláris növekedési rátákhoz. A kiinduló adatok nagyságrendjei ezért legjobb tudomásom szerint reálisaknak tekinthetõk.[10]

Ha felírjuk a kétszeresen végtelen Leontiefmátrixot, akkor ezeknek az adatoknak az alapján a (4) egyenletnek megfelelõen az alábbi mátrix adódik:

$$\begin{bmatrix} \cdots & & & & \\ & 3{,}1 & -3 & & \\ & & 3{,}1 & -3 & \\ & & & 3{,}1 & \\ & & & & \cdots \end{bmatrix} \qquad (9)$$

A mátrixnak csak kétfajta eleme van. A fõátló minden eleme változatlanul **C + B** = 3,1, s a következõ diagonálisban mindig **-B** = -3 áll. Ha a mátrixot saját transzponáltjával megszorozzuk, hogy eljussunk a megfelelõ Gramféle mátrixhoz, akkor is csak két elemet kell meghatározni. Minden fõátlóban álló elem $2(\mathbf{B}^2 + \mathbf{CB}) + \mathbf{C}^2 = 18{,}61$. Mellette mind az alsó, mind a felsõ diagonálisban egyaránt $-(\mathbf{B}^2 + \mathbf{CB}) = -9{,}3$ áll. A keresett Gramféle mátrix értékei ezért az alábbiak lesznek:

$$\begin{bmatrix} \cdots & -9{,}3 & & & \\ & 18{,}61 & -9{,}3 & & \\ & -9{,}3 & 18{,}61 & -9{,}3 & \\ & & -9{,}3 & 18{,}61 & \\ & & & -9{,}3 & \cdots \end{bmatrix} \qquad (10)$$

A mátrix legkisebb sajátértékét megbecsülhetjük az összegezõ [...1, 1,..., 1,...] vektorral szorozva. Ez minden esetben a 0,01 értékhez vezet, ami a 0,1 frekvenciát, tehát $2\pi/\ 0{,}1 \approx 63$ év körüli ciklushosszat ad. Hasonlít a Kondratyev által felfedezett ciklushoz. Sajátos tulajdonsága van. Eddig úgy véltük, hogy csak az egyensúlyi vektor elemei lehetnek mind pozitívak. Most azt látjuk, hogy egy ciklikus mozgást kiváltó vektor is állhat csupa pozitív elembõl. Ez azt jelenti, hogy itt olyan ciklussal van dolgunk, amely egyöntetûen, minden elemében szimultán módon (tehát fáziseltolódás nélkül) folyik le. A többi ciklus nem ilyen és nem is lehet ilyen, mert a hozzá tartozó sajátvektor változó elõjelû.

Ha most ilyen változó elõjelû egységekbõl álló vektorral szorzunk, akkor az elérhetõ legnagyobb sajátérték (az elemek abszolút értékének összege) 37,21. Ennek négyzetgyöke, 6,1, a frekvencia. Az ebbõl eredõ ciklus hossza $2\pi/\ 6{,}1$, ami csak kevéssel haladja meg az egy évet. De biztosan vannak még más frekvenciák is. A lehetséges ciklusok pontosabb és részletesebb leírásához csak úgy juthatunk, ha megtaláljuk a mátrix szabatos spektrális felbontását.

Szerencsékre olyan mátrixszal van dolgunk, amelyet a matematika már sokkal a számítógépek megjelenése elõtt nemcsak részletesen tárgyalt, de numerikusan is elemzett. Ez a sajátos alakú mátrix a geodéziai munkában merült fel. Nem más, mint a háromszögelési mérések kiértékelésének alapját adó *lánc* (chain) mátrix. Ez, mint látjuk, tridiagonális mátrix, inverzét és sajátértékeit tetszõlegesen hosszú lánc esetében rég táblázatokba foglalták.[11] BODEWIG [1959] (421. o.) pontos képletet közöl az általános láncmátrix sajátértékeire is. Legyen a $\mathbf{G}_n$ Gramféle mátrix olyan lánc, amelynek n tagja van, fõátlójának minden eleme 2, mellékdiagonálisaiban pedig -1 áll. Akkor e mátrix n darab egymástól szigorúan különbözõ sajátértéke Bodewig alapján:

$$y = 4\sin^2 \pi m/(2n+2), \quad \text{ahol } m = 1, 2, \ldots, n.$$

A lehetséges frekvenciák értéke ebbõl gyökvonással megállapítható. A frekvenciák spektruma 2sin(0) = 0 és 2sin(π/2) = 2 intervallumban van. Ha a mátrix által ábrázolt évek száma, *n*, minden határon túl növekszik, akkor a legkisebb frekvencia zérushoz tart, míg a legnagyobbak láthatóan 2 alatt sûrûsödnek, s azt határértékben el is érik. A fentebbiekben számszerûen felállított és kiszámított lánc pedig a 9,3 $\mathbf{G}_\infty$, + 0,01 **E** mátrix, ahol most **E** jelöli az, egységmátrixot.

Mindennek következtében a csonkítatlan és végtelen dinamikus Leontiefrendszerbõl képzett tridiagonális Grammátrix, tehát a végtelen gazdasági rendszer mátrixának ω frekvenciái (az egyensúlyi zérus értéken kívül) a már egyszerûbb megfontolások révén is kimondott

$$\sqrt{0{,}01} = 0{,}1 \leq \omega \leq \sqrt{37{,}21} = 6{,}1$$

intervallumban találhatók. A gazdasági ciklusok hossza ezek szerint nyersen 1 és 63 év közt adódhat, mégpedig (s ennyivel tudunk most többet Bodewig képlete alapján) rendkívül sok (tulajdonképpen "végtelen számú"), 1 év körüli, de egymástól szigorúan eltérõ hosszal bíró ciklust fogunk találni. Mint látni fogjuk, ebbõl adódik a gazdaságstatisztikai nyomvonalak sajátos, látszólag elõrejelezhetetlen fluktuációja, "fûrészfogazottsága".

Bízhatunke a kiszámított nagyságok rendjében? Mivel a frekvenciát a **C** és a **2B + C** mátrixok értékei határolják be, ezért a ciklushosszak lehetséges változása sem nagyobb a számítások elején tárgyalt lehetséges eltéréseknél. Tehát a hosszú ciklus lehet mintegy 20 évvel rövidebb is (kevésbé valószínû, hogy hosszabbnak adódjon), és biztosan csak egy van belõle. A rövid ciklusok lehetnek akár 10 hónaposak vagy másfél évesek is, de biztosan rendkívül sok közel egyforma van belõlük. S e két szélsõség közt található a szakirodalomban tárgyalt ciklusok egész választéka. Meglepetésünkre itt is mindenütt sok, egymástól csak kevéssé eltérõ hosszal bíró ciklus bukkan fel.[12] Ezért oly nehéz hát a tetõzés és a válság mély fordulópontjainak szabatos megállapítása és elõrejelzése.

Rövidebb ciklus a fenti modell alapján nem adódik. Vizsgáljuk meg újra, nem adódhate hosszabb ciklus. Már említettük az egyensúlyi növekedés vektorához tartozó zérus sajátértéket és frekvenciát. Ez a zérus érték végtelen ciklushossznak felel meg, és csak a végtelen láncmátrixban fordulhat elõ, mint arra Bodewig képlete alapján következtethetünk.

A növekedésnek a (9) mátrixból felírható 3,1-3Σ = 0 egyenlete szerint a növekedési ütem Σ= 1 + λ= 3,1/3 =1,033. Ehhez hasonlóan azonban a (10) mátrix alapján már a másodfokú

$$-9{,}3\varrho^2 + 18{,}61\varrho - 9{,}3 = 0$$

egyenletet fogalmazhatjuk meg. E másodfokú egyenletnek két megoldása van, és az ezeknek megfelelõ két növekedési ütem végtelen hatványsorának vektorával beszorozva a mátrixot, mindkét esetben zérus lesz a kapott eredmény, tehát a sajátérték. A fenti egyenletnek azonban nemcsak az elõbbi 1,033, hanem 0,976 is megoldása. Tehát nemcsak a 3,33 százalékos növekedés, hanem az ugyanilyen ráta szerinti csökkenés is megoldás. Márpedig csökkenõ termelés nem oldja meg a gazdasági növekedés (1) egyenletét, amelybõl kiindultunk. Látszólag ellentmondásra bukkantunk, mert a piaci mozgás nemcsak egyensúlyi növekedést, hanem (ugyanazon adatokból kiindulva) hasonló rátájú és szintén egyensúlyi csökkenést is lehetõvé tesz. Mi a nyitja e furcsa új megoldásnak, amely - kimondatlanul - ott lappang már Smith és Ricardo téziseiben?

Ha a termelés egyensúlyi és egyensúlyi ütemben is növekszik, akkor az ár nem változik, hiszen minden piac egyensúlyban van. Ha az ár is eleve egyensúlyban volt, akkor a termelés valóban tovább növekedhet a régi ütemben. Az ehhez szükséges beruházásokra a kialakult profitrára szerinti nyereség kellõ fedezetet nyújt. Ez a klasszikus teljes egyensúly ismert és elfogadott képe. A leírás azonban burkoltan tartalmaz egy ettõl eltérõ lehetõséget is.

Tegyük fel, hogy a termelés arányai egyensúlyban vannak, de nem növekednek, hanem éppenséggel *csökkennek*. Akkor egyenletes túlkínálat alakul ki minden piacon, s emiatt az árak csökkenni fognak, elvileg anélkül, hogy egyébként arányaikból kimozdulnának. S éppen ez az árcsökkenés lehet az oka a termelés általános csökkenésének, mivel az eladott termelés befolyó, de csökkent ellenértékébõl már nem lehet a termelést a régi szinten folytatni. S ebben az esetben ez az önmagában zárt és logikus jelenségkomplexum éppen úgy képes önmaga megörökítésére, mint az egyensúlyi ütemben történõ növekedés.

Az ilyenfajta jelenség az egyszerû újratermelés esetében nem következhet be, pontosabban szólva, az mindig stagnál, minthogy növekedési rátája zérus. Ezért e ráta negatívja is zérus, és nem is beszélhetünk a negatív ütemre való átváltás lehetõségérõl. A növekedés körülményei közt azonban az ilyen hibás kör elméletileg létrejöhet, s mint tudjuk, ami elromolhat, az idõnként el is szokott romlani.

S most egy logikailag talán túlságosan is merész, mert egyelõre nem teljesen alátámasztott következtetés adódik. Ha a termelés egyensúlyi változása lehet plusz vagy mínusz háromszázalékos, miközben az árak vagy változatlanok, vagy három százalékkal csökkennek, akkor talán kialakulhat egy mintegy 0,03 X 0,03 = 0,0009 frekvencianégyzetû ciklus is. A frekvencia ekkor 0,03, és ez a $2\pi/0,3$ képlet alapján mintegy kétszáz év tartamú ciklushoz vezet. Inkább a lehetõséget és nem a bizonyosságot fogalmaznám meg: a 200 éves gazdasági ciklus létezését nem tudom növekedés és cikluselméleti megfontolások alapján kizárni. Ezt látszik alátámasztani a fentiek alapján megszerkesztett és az alábbiakban bemutatott szimuláció is.

Illusztráció és diszkusszió

Mint említettük, a számítógép csak véges mátrixszokkal tud dolgozni, bár mostanára elég nagyokkal. Kiszámítottam egy 100 X 100as Gramféle láncmátrix összes sajátértékét. A mátrix a fenti (10) mátrix adatai alapján készült, de - véges lévén - az (5) elõírás alapján csonkítottam, tehát jobb alsó sarkában nem a 18,61 érték, hanem csak 9,01 szerepel [mivel a (9) mátrix alsó sarkában nem 3,1, hanem a csonkítás miatt csak 0,1 áll]. A kapott ciklushosszak táblázata, években kifejezve:

251,1100	3,3289	1,7519	1,2731	1,0830
45,2600	3,1762	1,7151	1,2589	1,0777
29,0270	3,0376	1,6802	1,2453	1,0726
20,6340	2,9112	1,6471	1,2323	1,0679
15,8650	2,7956	1,6156	1,2199	1,0634
12,8470	2,6895	1,5857	1,2080	1,0593
10,7810	2,5917	1,5573	1,1966	1,0554
9,2829	2,5013	1,5302	1,1858	1,0519
8,1487	2,4177	1,5045	1,1754	1,0486
7,2614	2,3400	1,4799	1,1655	1,0456
6,5488	2,2676	1,4565	1,1560	1,0429
5,9643	2,2002	1,4341	1,1470	1,0404
5,4764	2,1371	1,4128	1,1383	1,0382
5,0632	2,0781	1,3925	1,1301	1,0363
4,7089	2,0227	1,3730	1,1223	1,0346
4,4018	1,9706	1,3544	1,1149	1,0332
4,1332	1,9217	1,3367	1,1078	1,0321
3,8964	1,8755	1,3197	1,1011	1,0312
3,6860	1,8320	1,3035	1,0947	1,0305
3,4980	1,7908	1,2879	1,0887	1,0302

Szerepel benne egy 251 éves ciklus és egy Kondratyevszerû hullám, amelynek hossza itt (a csonkítás következtében) csak 45 éves.[13] Van négy kissé eltérõ, de 4 évre kerekíthetõ és háromfajta 5 évre kerekíthetõ ciklushossz. Ötven különbözõ rövid ciklus hossza pedig 1,5 év alatt marad. A spektrum mindenesetre igen sajátos alakú, rendkívül furcsa tulajdonságokkal bíró trajektóriát hoz létre.

Nem tudjuk persze, hogy egy adott kezdeti állapot milyen erõvel pendíti meg a lehetséges frekvenciák szerinti rezgéseket. Ezért a szimuláció egyforma és egységnyi koefficiensekkel számolt, a következõ képlet alapján:

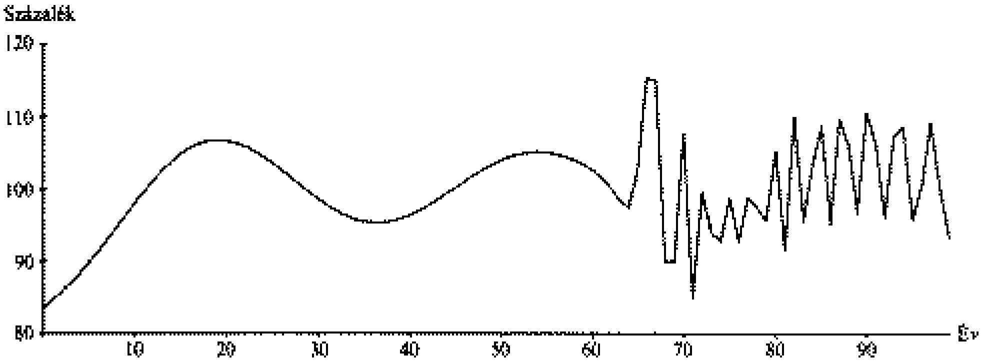
$$x_k = \sum_{i=1}^{100} \sin(\omega_i k) \quad k = 1, 2, \ldots, 100. \qquad (11)$$

Mint látjuk, szigorúan periodikus függvénnyel van dolgunk, amelynek ezért nincs trendje, azaz stacionárius. Csakhogy a ciklusok hossza nem feltétlen racionális szám, ezért az ismétlõdés legkisebb közös többszörösét nem tudtam kiszámítani. Ha azonban csak közelítõ ismétlõdést írunk elõ, mondjuk 2 tizedes pontossággal (hogy a szabad szemmel látható kép közel azonosan térjen vissza), akkor is a fenti ciklushosszak alapján 10^{231} évig kell várni, hogy az alábbi trajektória megismétlõdhessen. A világ kezdete, az õsrobbanás óta azonban még csak 10^{63} év telt el. Ennek következtében meglehetõsen egyéni lefutást várhatunk, s valóban azt is kapunk.

Az elsõ száz év alakulását az *1. ábra* mutatja.

1. ábra

Szimuláció *k* elsõ száz értékére



A szimultán, fáziskésés nélküli indítás és a sok egy év körüli periódushossz egyetlen sima és 40 évnél valamivel rövidebb ciklust hoz létre az elsõ "félévszázadban". A hatvanadik éven túljutva, a trajektória jellege hirtelen megtörik, és kaotikusnak tûnõ ingadozás lép fel. Az ingadozásban sok a hároméves ciklus (ez ismert jelenség a káosz matematikai irodalmában). A mozgás mégsem kaotikus, mert lineáris differenciálegyenletbõl származó egyszerû ciklusok kompozíciója. Csupán az okozza a káosz látszatát, hogy igen sok ciklus keveredik, ráadásul e ciklusok többsége közel egyéves idõtartamú. A kaotikus viselkedés a rövid hullámok folyton változó interferenciájából ered. Sztochasztikus folyamatnak sem tekinthetõ, bár arra is hasonlít. A folyamat szigorúan determinisztikus. Megjegyzendõ azonban, hogy az ismert valószínûségi eloszlásokat is szigorúan determinisztikus módon írja le a valószínûségszámítás, sõt a számítógép is szigorúan determinisztikus módon hozza létre a véletlen számokat, ha ezt írjuk elõ számára.

Nincs tehát igazán segítségünkre ez a tudás. Még ha tudjuk is a 100 évet felölelõ trajektóriáról, hogy az a látszat ellenére egyszerû szinuszhullámok egyvelege, akkor is legalább 300 év megbízható adatára volna szükség ahhoz, hogy következtetni tudjunk a 100 frekvencia, 100 fáziskésés és 100 amplitúdó nagyságára. Azt pedig, hogy 100 vagy 101, esetleg csak 99 frekvencia (vagy éppenséggel 2000 vagy még több) ismeretlen ciklus szerepele a valóságos gazdaság valóságos adatsorában, azt nem tudhatjuk és még nagyságrendileg is lehetetlen megbecsülni. Csupán a spektrum eloszlásának formájára ad felvilágosítást Bodewig idézett képlete.

Mindezért némi önkritikával tartozom a Szemle olvasóinak, akiknek három évvel ezelõtt (BRÓDY [1992]) bemutattam elõrejelzésemet, amely a magyar gazdaság történeti idõsorának cikluselemzésén alapult. A jövendölés eddig bevált, talán csak a várt fellendülés indult meg néhány hónappal korábban és bizonyul most erõtlenebbnek a reméltnél. Ezt most mégis hajlamos vagyok némi hályogkovácsi szerencsének is betudni.

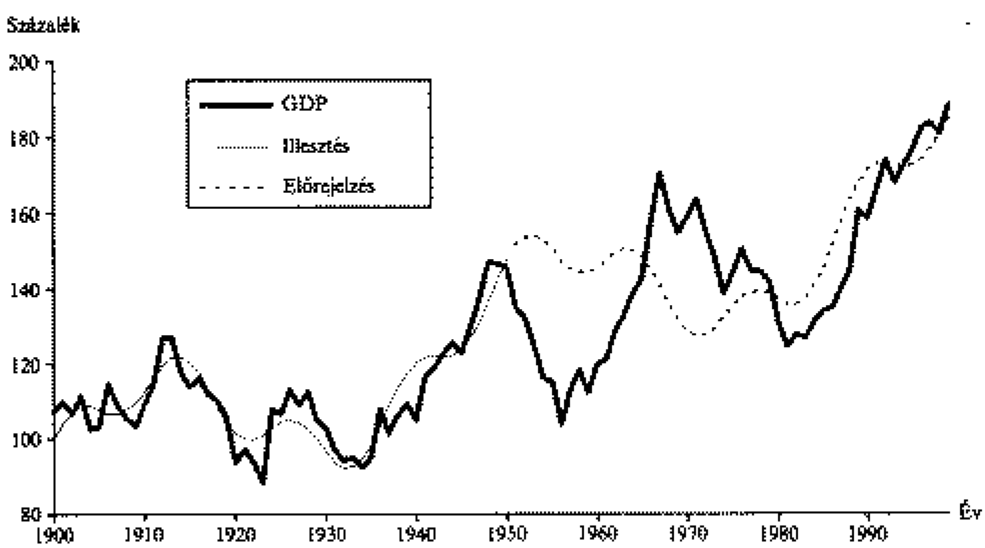
Nem a ciklusok létezésében kezdtem kételkedni, mégcsak nem is abban, hogy gondos statisztikai munkával ne lehetne elválasztani a nagyobb erõvel jelentkezõ ciklusokat az elhanyagolhatóaktól. Mégis, szembesülve a lehetséges ciklusok rendkívül nagy számával, csökkent a bizalmam a tekintetben, hogy a ciklus fordulópontjait a ma ismeretes eljárásokkal pontosan meghatározhassuk. Egy adott ciklus amplitudójának és fázisának meghatározása nem boszorkányság. Ha azonban felmerül a gyanú, hogy több, egymáshoz nagyon hasonló, de idõtartama és ereje tekintetében mégis kissé eltérõ ciklus együttes hatását kell felmérni, akkor a ma használatos módszereket alaposan újra kell gondolni.

A szemléltetõ, mintegy képi tájékoztatás érdekében kiszámítottam (szimuláltam) a fenti idõsor késõbbi menetére, mégpedig a k = 1900-2000 "évekre" *kumulált* GDP értékeit is. (Itt tehát az egyes évekre kapott és zérus várható értékû idõsort évi növekedési rátának tekintettem - lásd a *2. ábrát*).

Mégis, mintha az elsõ világháború, a harmincas évek válsága, a második világháborúba vezetõ fellendülés, a hatvanas évek viszonylag ciklusmentes növekedése, de még a nyolcvanas évek recessziója is belelátható volna a grafikonba. Ez teljesen véletlen, hiszen a görbe menete semmilyen tényleges gazdaság képét nem tükrözi. Csupán az átlagos gazdaságok erre az idõszakra megállapítható két reális makroadata, a megtakarítási ráta és a tõkeigényesség kelti mindazt a változatos rezgést, beleértve a hosszabb ciklusokat eltakaró sok kis ingadozást, amit az *2. ábrán* láthatunk.

2. ábra

Szimuláció k = 1900-tól 1999-ig terjedõ értékeire



Megkíséreltem e mesterséges adatokhoz egy trendbõl, valamint 4, 12 és 42 éves ciklusokból álló idõsort illeszteni az elsõ ötven évre. Ez szorosan simul és elfogadhatóan leírja az adatok menetét. Aztán megkíséreltem ennek alapján "elõrejelezni" a második ötven évet. Itt az elsõ tíz évben roppant nagy az eltérés. Bár jelzi az 1956ra bekövetkezõ visszaesést, de mértékét alábecsüli. Hasonlóan alábecsüli az erre következõ fellendülést is. Végezetül azonban (óh, csodák csodája) 1980tól az "ezredvégig" megint szépen illeszkedik a tényleges, azaz mesterségesen megszerkesztett adatokhoz.

A tanulság tehát egyelõre csak annyi, hogy a 100 ciklusból vett kis mintával mégis a vártnál jobban meg lehet közelíteni egy adott gazdasági rendszer nyomvonalát. Már három ciklus is viszonylag szorosan leírja a bonyolult menetet, s az illeszkedést megjavítani is lehetne a közelítõ ciklusok hosszának optimális megválasztásával. A pontos és megbízható leírás és elõrejelzés módszertana azonban mégis matematikai felülvizsgálatra szorul. E felülvizsgálat lényege az, hogy nem néhány (csekély számú) "legfontosabb" ciklus megállapítására kell törekedni, hanem a csak eloszlásában ismert, de ismeretlen számú ciklus által létrehozott nyomvonalat kell a lehetõ legegyszerûbb eszközökkel megközelíteni.

Ami pompásan sikerült, az a trend megközelítése volt. Ebben csak az a hiba, hogy - mint már említettem - az adatsor stacionárius, tehát nincs és nem is lehet trendje. Ha átmenetileg létrejön ennek látszata (a 251 éves ciklus éppen felfelé menõ ágában), akkor ennek 125 idõegység múlva megjön a böjtje. Esetünkben a nyolcadik 251 éves szinuszhullám éppen k = 2004ben indul. Tehát elõtte és utána 63-63 évig növekedõben van... Ennek pontosan eleget tesz a GDP ábrázolt menete, amely láthatóan a harmincas évek táján kezd fellendülni. Az addigi trend ugyanis csökkenést mutat.

Ennek tanulságát a fentinél határozatlanabbul tudom csak levonni. Talán gyümölcsözõ lehet, ha a gazdasági trendet is valamiféle hosszú ciklusnak fogjuk fel. Ez ellen szól, hogy akkor az elõrejelzés függ e ciklus feltételezett hosszától. Mint láttuk, éppen ez az az érték, amit elméletileg és gyakorlatilag egyaránt a legnehezebb megállapítani. Mindenképpen helyes volna azonban elgondolkodni azon, hogy a hagyományos felfogás, amely trendre, ciklusra és véletlen hatásra bontja a gazdasági idõsorok elemzését, nem szorule némi módosításra a hatékonyabb elõrejelzések érdekében. A "véletlent" a sok rövid periódus megmagyarázza. Itt módosítást csak a valószínûségi változó eloszlására vonatkozó feltételezések jelenthetnek, amelyeket a sajátértékek eloszlásából kell levezetni. A trendnek egy nagyon hosszú ciklussal való helyettesítése (e hossz haladja meg a vizsgált idõszak mintegy húszszorosát) szintén nem jelenthet lényeges változást numerikus szempontból. De talán éppen a mozgás magyarázatának egyöntetûsége adhat némi új kapaszkodót azzal, hogy a gazdasági növekedést kvázistacionárius folyamatnak tekinti, a megfelelõ megszorításokkal.

Az elemzés és elõrejelzés matematikai módszereinek további javítására vonatkozó javaslat, a javaslatok természetének megfelelõen, puhatolózó és bizonytalan. Határozottan ki kell mondani azonban egy, a kutatásból adódó, fontosnak és központinak tartott elméleti következtetést.

Mindeddig szinte kibékíthetetlen ellentétet, szöges ellentmondást véltünk vagy konstruáltunk a gazdaság viselkedésére vonatkozó ismert elméletek közt. Smith és Ricardo sima növekedést látott ott, ahol Sismondi és Marx a válságokat hangsúlyozta, Slutzky és az ökonometria pedig a véletlen megrázkódtatások hatására kialakuló sztochasztikus és kaotikus jelenségeket. Ez az alapvetõ látásmód vagy szemlélet határozta meg aztán mindhárom iskola fogalmait, terminológiáját, tudományos és vitamódszereit, valamint gyakorlati javaslatait is.

A három jellegzetesen eltérõ felfogás az idõk folyamán szinte misztikus ideológiai hadrendekké, politikai pártok és programok kristályosodási pontjává merevült. A liberalizmus védszentje Smith, a szocializmusé Marx, míg a szakszerûség az adatok és a matematika racionalitása mögé sáncolja magát. Itt azonban bebizonyosult, hogy a valóság mindhárom arca egyazon egyszerû összefüggésrendszer mûködésének eredménye. A fenti modellnek mind a három mozgásforma a sajátja, mindhármat jól leírja és ábrázolja. Logikailag ellentmondásmentes és egyöntetû felfogásra épül, s ez a felfogás egyik iskola alapvetõ szemléletével és téziseivel sincs ellentétben. Ráadásul a modell elemi eszközökkel dolgozik és egy igen szimpla lineáris differenciálegyenletre épül.

A modellben, mint a gazdasági valóságban is, a háromfajta lehetséges mozgás eredeti természetes egységében és összefüggésében nyilvánul meg. Az egyes mozgásformáknak megfelelõ három szemlélet ezért valójában nem is lehet ellentétes, hiszen csupán a valóság három különbözõ, de együttesen létezõ és egyformán lényeges vonását ragadja meg.

E következtetés kimondását és félreérthetetlen megfogalmazását látom a kutatás, sõt egész eddigi munkám legfõbb eredményének.

Hivatkozások

BODEWIG, E. [1959]: Matrix Calculus. North Holland, Amszterdam.

BRÓDY ANDRÁS [1972]: An Input-Output model for the market. Megjelent: *A. Bródy* and *A. P. Carter* (szerk.): InputOutput Techniques. North Holland, Amszterdam.

BRÓDY ANDRÁS [1992]: Gazdaságunk az ezredfordulón. Közgazdasági Szemle, 9. sz.

GOODWIN, R.: [1952]: Static and dynamic linear equilibrium models. Megjelent: Proceedings of the First International InputOutput Conference. Driebergen, Hollandia.

LEONTIEF, W. [1953]: Studies in the structure of the American economy. Oxford University Press, Oxford.

LEONTIEF, W. [1970]: The dynamic inverse. Megjelent: *A. P. Carter* and *A. Bródy* (szerk.): Contributions to InputOutput Analysis. North Holland, Amszterdam.

PETRI, P. [1972]: Convergence and temporal structure in the Leontief dynamic model. Megjelent: *A. Bródy* and *A. P. Carter* (szerk.): InputOutput Techniques. North Holland, Amszterdam.

---

[*] Köszönetemet fejezem ki az OTKA T13795 számú támogatásának, valamint az intézet matematikai szemináriumának. A kutatás elsõ összefoglalása, részletes matematikai függelékkel felszerelve, *E. Dietzenbacher* szerkesztésében, az *Economic Systems Research* 1995. évi 3. számában jelenik meg. A magyar változat fõként az értelmezést és nagyságrendi tárgyalást szolgálja.

[1] Pontosabban szólva ilyenkor ez a végsõ fogyasztás is a rendszer belsõ felhasználása. Kibõvítjük az **A** mátrixot a végsõ felhasználók (általában a háztartások, állam, külkereskedelem stb.) szektoraival.

[2] Hipermátrixnak nevezzük az olyan mátrixot, amelynek elemei maguk is mátrixok. Hasonlóan definiálhatjuk a hipermátrix hipersajátvektorát is. Ez tehát egy mátrixokból álló vektor lesz. A hipersajátérték ilyenkor nem skaláris mennyiség, hanem maga is mátrix, és a sajátérték reciprokát a mátrix invertálásával számíthatjuk ki.

[3] Ezzel megoldható az úgynevezett dimenziós ellentét. E szerint tõkét (stock) és áramlatot (flow) nem szabad közvetlenül összegezni, mert nem azonos a mértékegységük.

[4] Leontief eredeti modellje a technikai változását is leírhatóvá teszi, mert változó elemû mátrixokat használ. A felmerülõ problémákat azonban könnyebb így elemezni és magyarázni. A javasolt megoldás változó mátrixok esetén is alkalmazható.

[5] A tervezést szakszerûbben felhasználó országokban, például Japánban, a feleslegessé vált vállalatok és ágazatok békés és gazdaságos halála, euthanáziája szintén tárgya a tervezésnek. A gazdaság technikai elmaradása tehát nem a tervezés szükségszerû következménye. Az elmaradásért éppen a figyelmetlen és szakszerûtlen tervezést és az ebbõl eredõ hibás érdekeltségi rendszert okolhatjuk.

[6] Az említett angol nyelvû változat függelékében részletesen bizonyítottam, hogy ez a törvényszerûség általános, tehát a sokszektoros modellek esetében is fennáll.

[7] Itt ez természetesen nem valódi növekedés, hanem stagnálás, egyszerû újratermelés, mert a végsõ fogyasztás sem növekszik.

[8] A fenti egyenletek, mint Goodwin késõbbi híresebb modelljei is, úgynevezett hamiltoni formaként írhatok le. Ez lényegesen segíti a matematikai elmélet kialakítását és egységesítését. Mivel a hamiltoniánusok elmélete fizikai megfontolásokon alapult, külön és részletes ismertetését tervezem. Itt csak a mátrixelméletbõl is levezethetõ sajátosságokra támaszkodom.

[9] Ne feledjük, hogy ugyanez a többlet a nemzeti jövedelem vagy a GDP értékéhez viszonyítva sokkal nagyobb, a duplája vagy még magasabbnak adódik. A fenti adatok tehát mintegy 10 és 30 százalék közötti megtakarítási rátákat fognak át, ha a jövedelmekhez viszonyítjuk õket. Ha pedig teljes termelésnek a tervgazdaságokban megismert igen alacsony jövedelemtermelési hányadát vesszük figyelembe, az arány még a 40 százalékot is jócskán meghaladhatja.

[10] Ezek a nagyságrendek viszonylagosan változatlanok az ismert történelem és igen eltérõ társadalmi formációk esetében, függetlenül attól, hogy a megtakarítások fûkunyhókban vagy felhõkarcolókban, ásókban vagy exkavátorokban testesülneke meg. Nincs és nem volt társadalom, amely munkájának felét megtakarította, vagy egészét felélte volna. A tartós eszközök mindig és mindenütt legalább 1 évi munkába kerültek, és soha és sehol nem érték el 7 év munkáját. A nagyságrendeket valószínûleg az életidõ szokásos hosszától függõ szemléletünk alakítja. Ez szabja meg, hogy mi "rövid" és mi "hosszú" idõtartam a gazdaságban. A gazdasági folyamatoknak az év (nem a másodperc és nem az

ezer év) a "természetes" mértékegysége.

[11] Ezek a láncok alkotják a kijelölt geodéziai hálózatoknak azt a részét, amit már a bonyodalmas helyi mérések elvégzése és matematikai kiegyenlítése elõtt, mintegy az irodában ülve, elõre invertálni lehet.

[12] A következõ fejezet felsorolja egy speciálisan összeállított, tehát csonkított 100 X 100as mátrix valamennyi ciklushosszát.

[13] A csonkítás csak a legkisebb sajátértékeket csökkenti észrevehetõen, és a nagyobb sajátértékeket csak elenyészõ mértékben módosítja. A bizonytalanság éppen a két leghosszabb ciklus tekintetében a legnagyobb. A leghosszabb és mintegy 200 évesnek vélt ciklus roppant bizonytalan. Létezését a modell ugyan alátámasztja, mert valamilyen hosszú ciklusnak léteznie kell, hogy mind a 100 sajátértékrõl el tudjunk számolni. A csonkítás formája azonban nem egyértelmû. Ha például a jobb alsó sarokban álló **1-A** = 0,1 értékhez hozzáadjuk λ, értékét, az így adódó 0,133 érték körülbelül 200 éves hosszat eredményez.