KÖZGAZDASÁGI SZEMLE, LXVI. ÉVF., 2019. ÁPRILIS (345–375. o.)

SIMONOVITS ANDRÁS

Merev vagy rugalmas nyugdíjkorhatár?

Áttekintés

Az öregedő társadalmak nyugdíjgondjainak megoldásában az egyik leghatékonyabb eszköz az átlagos nyugdíjba vonulási kor (az úgynevezett korcentrum) emelése. A járulékkulcs emelése vagy a nyugdíj/kereset arány csökkentése politikailag nehezebb, és gazdaságilag sem vonzó. Ehhez a minimális és az általános nyugdíjkorhatár párhuzamos emelésén kívül erősíteni kell az ösztönzőket is, például a rugalmas nyugdíjba vonulási kor bevezetésével. Ebben az áttekintésben a témában több társszerzővel együtt folytatott, 17 éven át tartó kutatásaim legfontosabb eredményeit körvonalazom, amelyekből a két legizgalmasabbat emelem ki: *1.* hogyan kell az eszmei számlát módosítani, ha a népesség várható élettartama szerint heterogén? *2.* Hogyan teszi bumeránggá a reálbérrobbanás a Nők40-et?*
Journal of Economic Literature (JEL) kód: H55.

Bevezetés

Sajnálatos módon a nyugdíjgazdaságtan sem angolul, sem magyarul nem használ egyértelmű fogalmakat. Ezért a cikket egy rövid fogalomtárral kezdem, amely a különféle *öregségi* nyugdíjkorhatárokra vonatkozik. *Általános (irányt adó, törvényes, normális stb.) korhatár* az az életkor, amelynek elérésekor a dolgozó teljes (málusz nélküli) nyugdíjra jogosult. *Minimális nyugdíjkor* az az életkor, amelynek

* Köszönetemet fejezem ki az itt áttekintett cikkeim társszerzőinek, névsorban: *Czeglédi Tibornak, Eső Péternek, Erik Gransethnek, Horváth Dianának, Wolfgang Kecknek, Wolfgang Naglnak, Szabó Endrének, Tir Melindának* és *Tóth Jánosnak.* Hálával tartozom *Reiff Ádámnak,* hogy felhívta a figyelmem arra, hogy a nyugdíjszámítás alapja számára a nettó bért nem a logikus (4), hanem az önkényes (4') alapján számítják; *Gál Róbert Ivánnak* a reálbéremelkedés hatásának hangsúlyozásáért, valamint *Banyár Józsefnek,* hogy rámutatott: a feltételes várható életkort nem a (6), hanem a (6') képlet alapján kellene számítani. Ugyancsak köszönettel tartozom *Rudas Tamásnak,* hogy korrelációs megfigyelésemet összekapcsolta a Berkson-paradoxonnal, és *Halpern Lászlónak, Köllő Jánosnak,* valamint a cikk névtelen lektorának értékes megjegyzéseiért. Külön köszönet illeti *Nick Barrt* és *Peter Diamondot* nagyvonalú és önzetlen támogatásukért.

Simonovits András, MTA KRTK Közgazdaság-tudományi Intézet, BME Matematikai Intézet (e-mail: simonovits.andras@krtk.mta.hu).

A kézirat első változata 2019. január 2-án érkezett szerkesztőségünkbe.
DOI: http://dx.doi.org/10.18414/KSZ.2019.4.345

elérésekor a dolgozó legkorábban öregségi nyugdíjba vonulhat. A minimális és az általános korhatár között igényelt *előrehozott nyugdíj* általában málusszal csökkentett járadékot ad. A csökkentés nélküli (szenioritási) előrehozott nyugdíj csak elegendő hosszú szolgálati idő (vagy jogviszony) után jár, 2012 óta Magyarországon csak egyféle előrehozott nyugdíj létezik: a csökkentés nélküli *Nők40*. (A korkedvezményes és korengedményes nyugdíj csak kivételes munkakörökben jár, a továbbiakban ezeket figyelmen kívül hagyjuk.) *Halasztott nyugdíjról* beszélünk, ha a dolgozó az általános korhatár elérésekor sem vesz fel nyugdíjat, és tovább dolgozik (bónuszért). *Rugalmas korhatárról*[1] beszélünk, ha tág határok között a dolgozó maga dönt, hogy mikor vonul nyugdíjba. Az *átlagos korhatár* (korcentrum) a tényleges nyugdíjba vonulási életkorok átlaga, amely rugalmas korhatárnál jelentősen szóródhat. Ha nem lenne sem előrehozott, sem halasztott nyugdíj, akkor az általános korhatár és az átlagos nyugdíjkor egybeesne.

Az öregedő társadalmak nyugdíjgondjainak megoldásában az egyik leghatékonyabb eszköz az átlagos nyugdíjkorhatár, azaz nyugdíjba vonulási kor (az úgynevezett korcentrum) emelése. (A járulékkulcs emelése vagy a nyugdíj/kereset arány csökkentése politikailag nehezebb, és gazdaságilag sem vonzó.) Ehhez a minimális korhatár és az általános nyugdíjkorhatár párhuzamos emelésén kívül erősíteni kell az ösztönzőket is, például a rugalmas nyugdíjkorhatár bevezetésével. Magyarországon sajnálatos módon főleg az általános korhatár emelésére figyeltek. 2012 óta a korhatárminimum az általános korhatárra ugrott, és csak a 2011-ben bevezetett Nők40 kedvezményezettjei mentesültek eme páratlan szigorúságú törvénytől, de gyakran még ők is pórul járnak.

Ebben az áttekintésben főleg az évek szerepével foglalkozunk, és legtöbbször eltekintünk az értékektől (a bérek és a nyugdíjak nagyságától). Igyekszünk empirikusan is megalapozni érvelésünket, de a fő hangsúly a modelleken lesz.

Először a kormányok által törvénybe iktatott, illetve a népességöregedés által indokolt általános korhatáremelést vizsgáljuk. Magyarországon 1996 és 2022 között a női/férfi általános korhatár gyorsan emelkedett (55/60-ról 65/65 évre), a születéskor várható élettartam 75,6/67,1-ről (2000-ben) csupán 78,6/72,1 évre (2015-ben) emelkedett. Ha eltekintünk a korhatárminimum előtt meghaltaktól, akkor célszerűbb a 60 éves korban feltételesen várható hátralévő élettartammal számolni. A nők/férfiak megfelelő mutatói: 20,0/15,3 (2000-ben), 21,7/17,3 (2015-re). A meredek korhatáremelés oka: olyan alacsony volt a korhatár, hogy a döntéshozók célszerűnek látták a nyugdíjrendszer egyéb problémáit is korhatáremeléssel kezelni.

Megismételjük, hogy a törvényben előírt általános korhatár emelése mellett a ténylegesen megvalósuló átlagos korhatárt (a korcentrumot) is emelni kell, ehhez pedig vagy merev rendszabályok, vagy okos ösztönzők kellenek. Jelenleg a magyar rendszert a lazaság és a merevség együttese jellemzi, de azért érdemes legalább modellszerűen megvizsgálni, hogy miként emeli egy észszerű rendszer – például az eszmei számla – az átlagos korhatárt.

[1] Érdekes, hogy az angol nyelvű szakirodalomban gyakran *variable,* azaz változó nyugdíjba vonulási korról beszélnek.

Az eszmei számla rendszere egy olyan társadalombiztosítási nyugdíjrendszer, amelyben minden dolgozó számláján a teljes munkapályán befizetett járulékok névlegesen felhalmozódnak, valamilyen észszerű eszmei kamatlábbal kamatozódnak, továbbá az évi nyugdíj az eszmei számla és a (kamatlábbal leszámítolt) várható élettartam hányadosa. Ha egy évjárat adott életkorban várható élettartama emelkedik az előző évjáratéhoz képest, akkor fordított arányban csökken az eszmei nyugdíj. A minimális kort elérve a dolgozó tág keretek között eldöntheti, hogy a munkaképesség csökkenésétől (ezt a továbbiakban fáradtságnak nevezzük), fáradtságától függően inkább tovább dolgozik, vagy beéri alacsonyabb nyugdíjjal. A svéd rendszer gyakorlata biztató, ezt egészíti ki az egyszeri és a részleges (fokozatos) nyugdíjba vonulás.

Bár nagyon kevés adatunk van a nyugdíjazás előtt álló dolgozók élettartamának heterogenitására, a „fáradtsági" különbségek mellett ez is fontos szerepet kaphat; igazolható, hogy észszerű nyugdíjrendszerben minél hosszabb élettartamra számíthat valaki, annál később érdemes nyugdíjba mennie (vö. *Simonovits* [2004*b*]). A főszövegben csak elemi modelleket mutatunk be, ahol a nyugdíjjárulékon kívül nincs más időskori megtakarítás. (A *Függelék* első részében viszont a nyugdíjrendszer nélküli egyéni munkakínálati és megtakarítási pályát elemezzük – különös tekintettel az öregedéssel járó teljesítménycsökkenésre.)

Elméleti érdekessége miatt – a *Függelék* második részében – külön említjük a mechanizmustervezést. Ebben a kifinomult modellkeretben nemcsak az egyének optimalizálják saját életpálya-hasznosságfüggvényüket, hanem a kormányzat is optimalizálja az ezekből aggregálással kapott társadalmi jóléti függvényt – mégpedig úgy, hogy egyik típusnak se legyen érdeke másik típusnak tettetnie magát. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy bár lehetséges, de nem célszerű a várható befizetések és a várható kifizetések egyensúlyát típusonként megkövetelni (*Simonovits* [2004*a*]): túl nagy lenne a jóléti veszteség.

Bár az eszmei számla rendszerében a szolgálati évek nem játszanak szerepet, a hagyományos nyugdíjrendszerekben igen. Az elemzők figyelmét sajnálatos módon gyakran elkerülte, hogy a nyugdíjba vonulási kor és a szolgálati évek viszonylag függetlenek. Pedig a legtöbb nyugdíjrendszer figyelembe veszi e függetlenséget, és a két változó egymástól függetlenül határozza meg az éves nyugdíj értékét. Például Magyarországon egy szolgálati év (40 és 50 év között) 2 százalékponttal emeli a valorizált átlagos nettó bérben kifejezett nyugdíjat; az általános korhatáron túl minden halasztott év 6 százalékkal emeli a korhatáron megállapított nyugdíjat. Ugyanakkor az Egyesült Államok tb-nyugdíjrendszerében hiába dolgozik valaki többet, mint 35 év, csak a legjobb 35 éve számít.

A tömeges és tartós munkanélküliségtől való túlzott félelem miatt a magyar nyugdíjrendszer mindig laza volt, különösen a hosszabb szolgálati idejű dolgozók számára. 2009 előtt csak minimális málusszal csökkentette az előrehozott (nem csupán a közbeszédben kizárólagosan szereplő korkedvezményes és korengedményes) nyugdíjat. Bár 2012-ben megszűnt a szokásos és észszerű előrehozott nyugdíj, már 2011-ben belépett a Nők40. Ez a rendszer minden magyar nőnek megengedi, hogy legalább 40 éves jogviszony összegyűjtése után csökkentés (málusz) nélkül nyugdíjba menjen. Az nyilvánvaló, hogy ez a rendszer méltánytalan a 40 évhez közeli, de attól elmaradó hosszúságú jogviszonyú nőkkel szemben. Meglepő módon a legutóbbi évek látványos reálbér-emelkedése a kedvezményezett 40-eseket is büntette a 40 évnél hosszabb ideig dolgozókkal szemben.

A modellezés szempontjából kényes kérdés, hogy a nyugdíjazást követő néhány évben a friss nyugdíjasnak van-e néhány évig jelentős pénzkeresete, vagy nincs. (Ha családján belül a friss nyugdíjas olyan fizetetlen munkát végez, amely más családtagja fizetett munkavállalását teszi lehetővé, akkor ez szempontunkból fizetett munkának tekinthető.) A Nők40 bumeránghatását tanulmányozva feltesszük, hogy a példánkban szereplő nőnek átmenetileg van jelentős keresete, más modellekben viszont nincs.

A szakirodalomra csak röviden utalunk. A nemzetközi szakirodalomban *Knell* [2018] a növekvő várható élettartamot egyeztette össze az eszmei számlával. *Gál–Radó* [2019] empirikusan vizsgálta, hogy az EU régi és új tagországaiban az átlagos nyugdíjba vonulási kor emelkedése mennyire sikeresen stabilizálja a nyugdíjban töltött időt. *Sheshinski* [1978] és *Crawford–Lilien* [1981] elsők között modellezték a tb-nyugdíjrendszer hatását a nyugdíjba vonulási döntésre. A *Gruber–Wise* (szerk.) [1999] kötet nemzetközi összehasonlításban elemezte az ösztönzési rendszer kedvező és kedvezőtlen hatását. Azóta számos tanulmány vizsgálta e kérdéskört. Mind elméletben, mind gyakorlatban „Csipkerózsika-álmát" alussza a részleges nyugdíjba vonulás témaköre, pedig az általános korhatáremelést elfogadhatóbbá tenné.[2]

Bár a nyugdíjdegresszió vizsgálatakor (amikor a kereset emelkedésével egyre kevésbé növekszik az újonnan megállapított nyugdíj) nagy hangsúlyt kapott, hogy a népesség a várható élettartam szempontjából heterogén, a rugalmas nyugdíjkorhatár vizsgálatában a heterogenitás eléggé elsikkadt. Elméletileg belátható, hogy egy jól tervezett nyugdíjrendszerben a várhatóan hosszabb életűek később, a várhatóan rövidebb életűek hamarabb mennek nyugdíjba. Amikor 2002-ben első ilyen tárgyú cikkem megírtam (*Simonovits* [2002*a*]), még nem ismertem ilyen statisztikai adatokat, de azóta már igen (*Waldron* [2001] amerikai és *Molnár D.–Hollósné Marosi* [2015] magyar adatokat tartalmaz).

A nyugdíjgazdaságtanban a mechanizmustervezést először *Diamond–Mirrlees* [1978] alkalmazta, méghozzá a rokkantnyugdíjra. Az alapötlet a következő: figyelembe véve, hogy a kormányzat gyakran képtelen pontosan megállapítani, hogy a rokkantosítását kérő dolgozó mennyire rokkant, ezért a teljes információhoz tartozó rokkantnyugdíjnál kevesebbet ad, de nem hagyja az út szélén a valóban rokkantakat. Az időskori optimális nyugdíjba vonulási korra elsőként *Fabel* [1994] alkalmazta ezt a bonyolult elméletet, de a könyv sokáig árnyékban maradt; én is jóval *Eső–Simonovits* [2003] és *Diamond* [2004] megjelenése után figyeltem fel erre a publikációra. A további cikkek közül kiemeljük *Cremer és szerzőtársai* [2008] és *Bommier és szerzőtársai* [2011] cikkét. *Pestieau–Ponthiere* [2016] jó áttekintést nyújt arról, hogyan kezelheti a kérdést a jóléti állam.

A hazai szakirodalomból ki kell emelni a *Holtzer* (szerk.) [2010] NYIKA-kötetet és *Borlói* [2016] áttekintését a magyar nyugdíjrendszerről. A töredékes munkapályák és

[2] A részleges nyugdíjrendszert az angol nyelvű szakirodalom gyakran *flexible*-nek, azaz rugalmasnak nevezi.

a nyugdíjrendszer kapcsolatáról *Augusztinovics* [2005] és *Augusztinovics–Köllő* [2007] közölt úttörő cikkeket.

Az áttekintésben szereplő saját és társszerzős munkáim legfontosabb dimenzióit az *1. táblázat* mutatja: heterogén várható élettartam, mechanizmustervezés, szenioritás (aktuáriusi csökkentés nélküli, feltételes előrehozott nyugdíj) és változó reálbér, ez utóbbival alig foglalkozunk. (Ezt a hiányt részben pótolja *Simonovits* [2018*b*], [2018*c*].) Látható, hogy a felsorolt modellek mindegyikében van legalább egy pluszjel és legalább egy mínuszjel. A jelen tanulmány áttekintése nem követi az időrendi sorrendet.

1. táblázat
A rugalmas nyugdíjkorhatár modelljeinek fontosabb dimenziói

Modell neve	Heterogén várható élettartam	Mechanizmus-tervezés	Szenioritás	Változó reálbér
Simonovits [2002*a*], [2002*b*]	+	–	–	–
Eső–Simonovits [2003]	+	+	–	–
Simonovits [2004*a*], [2004*b*]	+	+	–	–
Simonovits–Tóth [2007]	+	+	–	–
Czeglédi és szerzőtársai [2016]	–	–	+	±
Simonovits [2018*a*]	–	–	+	+
Simonovits [2019]	–	–	+	+

A cikk szerkezete a következő. Először az öregedő népesség és az emelkedő általános korhatár kapcsolatát elemzi, majd stacionárius népesség esetén tanulmányozza a rugalmas korhatárt: a homogén élettartamú népesség eszmei számlás *(notional defined contribution, NDC)* és egyéb nyugdíjrendszerét vázolja, majd az optimális nyugdíjba vonulási kort számítja ki egyszeri vagy részleges nyugdíjba vonulásra. Ezt követően kiterjeszti a heterogén élettartamú népességre, majd a töredezett munkapályák hatását és a szenioritási nyugdíjrendszert, illetve a Nők40 szenioritási rendszert modellezi, különös tekintettel arra, amikor a gyors reálbér-növekedés miatt bumerángként hat. Végül levonjuk a következtetéseket. A *Függelék* első része egy tipikus dolgozó optimális munkakínálat–életkor pályáját számítja ki, kizárva a nyugdíjrendszer létezését, második része pedig a társadalmilag optimális nyugdíjjáradékot és a hozzá tartozó nyugdíjba vonulási kort számítja ki mechanizmustervezéssel.

Öregedő népesség – emelkedő általános korhatár

A modern nyugdíjrendszerek egyik legnagyobb problémája, hogy a népesség gyorsan öregszik. Ezt fejtjük ki a következőkben. Valóban, egy tiszta felosztó-kirovó tb-nyugdíjrendszerben a következő azonosság teljesül:

$$\tau_t M_t w_t = P_t b_t, \tag{1}$$

ahol a t-edik évben M_t a dolgozók létszáma, P_t a nyugdíjasok létszáma, w_t az átlagos teljes bérköltség, b_t az átlagnyugdíj (mindkettő reáláron) és τ_t a járulékkulcs.

Szokás szerint két fogalmat vezetünk be:

1. a (bruttó) átlagos helyettesítési arányt, más néven: nyugdíjszínvonalat, amely az átlagnyugdíjak és átlagbérek aránya: $\beta_t = b_t/w_t$;

2. az időskori rendszer függőségi hányadát, amely a nyugdíjasok és a dolgozók létszámaránya: $\pi_t = P_t/M_t$. Ekkor adott β_t esetén a t-edik év egyensúlyi járulékkulcsa:

$$\tau_t = \pi_t \beta_t. \tag{2}$$

Adott átlagos helyettesítési arány esetén a népességöregedéssel arányosan növekszik az egyensúlyi járulékkulcs. Kitérőként megjegyezzük, hogy *Simonovits* [2018*b*] éppen azt tanulmányozta, hogy árindexálás esetén mennyire érzékenyen csökken az átlagos helyettesítési arány a reálbér-növekedési ütem emelkedésével.

A P_t és az M_t létszámok, azaz a π_t hányados nemcsak a demográfiától, hanem a részvételi (μ_t) és a jogosultsági (ζ_t) hányadosoktól is függ. A demográfiai mutatókat csillaggal különböztetjük meg: M_t^* a dolgozókorúak száma, P_t^* a nyugdíjaskorúak száma és $\pi_t^* = P_t^* / M_t^*$ pedig az időskori demográfiai függőségi hányados, amely az általános nyugdíjkor-határtól függ. Könnyű belátni, hogy

$$\pi_t = \frac{\zeta_t \pi_t^*}{\mu_t}.$$

Valóban,

$$\frac{P_t}{M_t} = \frac{P_t}{P_t^*} \frac{P_t^*}{M_t^*} \frac{M_t^*}{M_t}.$$

Simonovits [2002*b*] 8.2. táblázatából látható a különbség a demográfiai és a rendszerfüggőség között az 1970–1996-os időszakban.

Legyen a t-edik év nyugdíjkorhatára R_t pozitív szám, és a legalább R_t évesek száma legyen $P_t^*(R_t)$, a fiatalabb, de legalább Q évesek (a munkába lépési korúak) száma legyen $M_t^*(R_t)$.

Gyakorlatiasabban fogalmazva, legyen a t-edik év elején a k évesek létszáma $n_{k,t}$. A (2)-t továbbgondolva:

$$M_t^*(R_t) = \sum_{k=Q}^{R_t-1} n_{k,t} \quad \text{és} \quad P_t^*(R_t) = \sum_{k=R_t}^{D} n_{k,t}. \tag{3}$$

A *2. táblázatban* megadjuk a születéskor és a 60 éves korban várható magyarországi élettartamot néhány válogatott évre.

2. táblázat
Születéskor és 60 évesen várható élettartam, Magyarország

Évek	Születéskor		60 évesen	
	várható élettartam			
	férfi	női	férfi	női
1980	65,5	72,7	14,6	18,3
1990	65,1	73,7	14,7	19,0
2000	67,1	75,6	15,3	20,0
2010	70,5	78,1	16,8	21,6
2015	72,1	78,6	17,3	21,7

Forrás: ONYF [2016] 2.7–2.8. táblázat, 28–29. o.

Az érem másik oldalán áll a teljes termékenységi arány, amelynek viharos hazai alakulását mutatja be a *3. táblázat.* A ciklikus ingadozás mellett a kezdő 2,73-os arány az időszak végére 1,28-ra süllyedt, a legújabb adat (2017) 1,5.

3. táblázat
Teljes termékenységi arány idősora, Magyarország

Időszak	Teljes termékenységi arány	Időszak	Teljes termékenységi arány
1950–1954	2,73	1980–1984	1,81
1955–1959	2,21	1985–1989	1,82
1960–1964	1,82	1990–1994	1,73
1965–1969	1,98	1995–1999	1,38
1970–1974	2,09	2000–2004	1,30
1975–1979	2,12	2005–2009	1,28

A hézagos *4. táblázatból* látható, hogy Magyarországon az általános korhatár emelése nemcsak stabilizálta, de időnként csökkentette is a demográfiai függőségi hányadost. Kérdés: hogyan alakult a rendszerfüggőségi hányados, amelyet a nagyon ritkán előforduló korhatár fölötti munka és a nagyon gyakori korhatár alatti nyugdíjasok emelnek? Végül is fix nyugdíjjárulék esetén ez határozza meg az átlagos helyettesítési arányt.

A következőkben elméleti számításokkal elemezzük a növekvő élettartam és a csökkenő termékenység kettős szorítását ellensúlyozó korhatáremelést. Itt a teljes termékenységi arány hatását vizsgáljuk a legegyszerűbb stabil népességben (ahol a korosztályok létszámaránya időben változatlan). Minden korosztály minden tagja D évig él, és minden tagjának F éves korában f számú gyermeke születik – ez körülbelül a teljes termékenységi arány fele. Itt f tetszőleges pozitív valós szám. (Ezt úgy lehet elképzelni, hogy a szülők $p_k > 0$ része k-s ikreket szül, ahol $k = 0, 1, 2, 3, 4$ és

4. táblázat
Általános korhatár és időskori függőségi hányadosok

Év	Férfi	Női	Demográfiai	Rendszer-*
	általános korhatár		függőségi hányados	
1997	60	55		
1999	61	57	?	
2001	62	58		
2003	62	59	0,343	
2005	62	60	0,335	
2007	62	61	0,327	
2009	62	62	0,317	
2011	62	62	0,328	
2013	62	62	0,345	
2016	63	63	?	
2019	64	64		
2022	65	65		

* Ezt az oszlopot üresen hagytuk, jelezve, hogy szükség lenne a rendszerfüggőségi hányadosok kiszámítására is, de erre eddig még nem került sor.
Forrás: ONYF [2016] 2.4. táblázat, 25. o.

$p_0+p_1+p_2+p_3+p_4=1$.) Ha x_t a t-edik évben született csecsemők létszáma, akkor definíció szerint igaz, hogy

$$x_t=fx_{t-F}.$$

Felhasználjuk, hogy a népesség stabil, azaz $v>0$ pozitív valós számra

$$x_t=x_0v^t.$$

Behelyettesítve a második egyenletet az elsőbe, egyszerűsítés után $1=fv^{-F}$. Ezzel eljutottunk az első megállapításunkhoz.

1. TÉTEL • *Stabil népességben, ahol minden szülő F éves korában f gyermeket szül, a népesség növekedési együtthatója:*

$$v=f^{1/F}.$$

A nyugdíjrendszer működésében alapvető szerepet játszik a népesség koreloszlása. Q éves korban kezdenek el az emberek dolgozni, R évesen mennek nyugdíjba, és D évesen halnak meg. A teljes népesség, a dolgozók és a nyugdíjasok létszáma rendre:

$$N=\sum_{a=1}^{D}v^{D-a},\quad P=\sum_{a=R+1}^{D}v^{D-a}\quad\text{és}\quad M=\sum_{a=Q+1}^{R}v^{D-a}.$$

Egyszerű behelyettesítéssel:

$$N = D, \quad P = D - R \quad \text{és} \quad M = R - Q, \quad \text{ha} \quad v = 1,$$

valamint a mértani sorozat összegképletét alkalmazva:

$$N = \frac{v^D - 1}{v - 1}, \quad P = \frac{v^{D-R} - 1}{v - 1} \quad \text{és} \quad M = \frac{v^R - v^Q}{v - 1}, \quad \text{ha} \quad v \neq 1.$$

Ebből adódik a kulcsszerepet játszó időskori függőségi hányados.

2. TÉTEL • *Stabil népességben az időskori függőségi hányad:*

$$\pi = \frac{D - R}{R - Q}, \quad \text{ha} \quad v = 1,$$

és

$$\pi = \frac{v^{D-R} - 1}{v^R - v^Q}, \quad \text{ha} \quad v \neq 1.$$

Kiemeljük, hogy míg az összegek csak természetes számokra vannak értelmezve, a mértani sor összegképlete tetszőleges pozitív számra is értelmes.

Triviális, hogy stacionárius népesség ($v = 1$) esetén, ha a munkába lépési kor és a nyugdíjba vonulási kor arányosan nő a várható élettartammal: $Q = \kappa D$ és $R = \rho D$, akkor π állandó, nevezetesen:

$$\pi = \frac{1 - \rho}{\rho - \kappa}.$$

Bonyolultabb a helyzet, ha a teljes termékenységi arány 2-ről 1,5-re csökken. Az *5. táblázatban* $\kappa = 1/4$, $\rho = 3/4$, azaz $\pi = 1/2$, $Q = 20$ és $D = 80$, $F = 30$ év esetén f fut 1-től 0,75-ig. Numerikus módszerrel határozzuk meg $R(f)$ értékét: gyorsan nő 60-ról 63,6 évre. Szemléltetésül megadjuk a népesség növekedési együtthatóját és a népességszámot. Az előbbi 1-ről 0,99-ra csökken, az utóbbi 80-ról 56-ra.

5. táblázat
Teljes termékenység–népesség szerkezet

A teljes termékenységi arány fele	A népesség növekedési együtthatója	Népességszám	Endogén korhatár
f	v	N	$R(f)$
1,00	1,000	80,000	60,0
0,95	0,998	74,834	60,7
0,90	0,996	69,867	61,4
0,85	0,995	65,095	62,1
0,80	0,993	60,517	62,8
0,75	0,990	56,128	63,6

Stacionárius népesség – rugalmas korhatár

A következőkben rátérünk a rugalmas korhatár elvi kérdésére. A rugalmas nyugdíjkorhatár kifejlődésének egyik legáttekinthetőbb példája a svéd rendszer, amely egyre tágabb teret ad a nyugdíjba vonulási kor egyéni megválasztásának, miközben az általános nyugdíjkorhatár változatlanul 65 év, és a minimális nyugdíjkorhatár 61 év. A 6. *táblázatban* három évjárat esetén mutatjuk be a rugalmasság növekedését, az újonnan nyugdíjba vonulók körülbelül 97 százalékát lefedve. Az átlagos nyugdíjba vonulási kor végig az általános korhatár, 65 év körül ingadozott, de míg az 1938-as évjáratnak több mint a 3/4-e, addig az 1949-es évjáratnak már csak a fele ment nyugdíjba az általános korhatáron.

6. táblázat
Nyugdíjba vonulási kor százalékos megoszlása, Svédország

Kor	Évjárat		
	1938	1943	1949
61	3,6	3,9	5,8
62	2,3	3,1	5,4
63	2,3	3,6	6,9
64	2,1	5,3	8,7
65	*77,3*	*66,4*	*52,4*
66	4,1	7,1	7,9
67	3,2	4,4	5,4
68	0,8	1,2	1,7
69	0,3	0,4	0,7
70	0,3	0,5	0,6
71–	0,6	0,7	1,1

Forrás: Swedish Pensions Agency [2017] 26. o.

Homogén élettartam

A következőkben a hagyományos megközelítést alkalmazva feltesszük, hogy a népesség várható élettartama homogén. Megismételjük a következő jelöléseket: $Q =$ a munkába állási kor, $R =$ a nyugdíjba vonulási kor, $D =$ a halálozási kor, determinisztikus paraméterek, egyelőre valós (nem csak természetes) számok:

$$0 < Q < R < D.$$

Szükségünk lesz az egyelőre időben és korban változatlan éves (vagy havi) szuperbruttó (w) és nettó (v) bérekre. Egyszerűség kedvéért visszavetítjük a 2013 óta érvényes, „matematikailag arányos” járulék- és szja-szabályokat a múltra. Ekkor w és v kapcsolata:

$$v = (1 - \tau - \theta - \iota)w, \qquad (4)$$

ahol τ = nyugdíjjárulékkulcs, θ = egészségügyijárulék-kulcs és ι = szja-kulcs. Egyelőre homogén szuperbruttó bérekkel dolgozunk: $w = 1$. A 2018-as paraméterértékek: $\tau = 0{,}205$, $\theta = 0{,}130$ és $\iota = 0{,}125$.

A valóságban bonyolultabb a helyzet: a tényleges képlet egyrészt kedvezőbb, mint az szja-számítás, mert az adóalapból levonható a tb-járulék:

$$\tilde{v} = (1 - \tau - \theta)(1 - \iota)w = [1 - \tau - \theta - \iota + (\tau + \theta)\iota]w. \qquad (4')$$

Másrészt a családi adókedvezményt élvezők számára a tényleges képlet kedvezőtlenebb, mert nem adódik hozzá a kedvezmény. Elméleti keretünkben ezek a finomságok remélhetőleg elhanyagolhatók.

Statikus és homogén világunkban az (1)-hez hasonlóan egyszerűen felírható a b nyugdíjra az úgynevezett eszmei számla képlete:

$$\tau(R - Q)w = (D - R)b. \qquad (5)$$

Ebből egyszerűen következően az R_m minimális és az R_M maximális nyugdíjba vonulási kor között érvényes a

3. TÉTEL • *Az eszmei számlás nyugdíj a nyugdíjba vonulási kor hiperbolikus függvénye*:

$$b^N(R) = \frac{\tau(R - Q)w}{D - R}, \qquad R_m \le R \le R_M. \qquad (6)$$

Adódik a

KÖVETKEZMÉNY • *Eszmei nyugdíjszámlánál a születéskor várható élettartam emelkedése automatikusan csökkenti az adott nyugdíjba vonulási korhoz tartozó éves nyugdíjat, ezért nincs szükség az általános korhatár explicit emelésére.*

SZEMLÉLTETÉS • $Q = 22$, $R = 62$ és $D = 80$ év, $\tau = 0{,}2$, azaz $b(62) = 0{,}2 \times 40/18 = 0{,}444$. Szuperbruttó bér helyett nettó bérhez viszonyítva a nyugdíjat: $b^N/v = 0{,}444/0{,}54 = 0{,}820$.

A később vizsgálandó általános $b(R)$ nyugdíj–kor függvények esetén szükségünk lesz az egyének életpálya-egyenlegére, amely az életpálya-befizetések és -kifizetések különbsége:

$$z(R, D) = \tau(R - Q) - b(R)(D - R). \qquad (7)$$

Könnyű belátni, hogy (6) esetén az egyenleg nulla: $z^N(R, D) = 0$.

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy számszerűleg hogyan függ az eszmei nyugdíj a nyugdíjba vonulási kortól. Előkészítésként a *7. táblázat* három, a nyugdíjrendszerben kitüntetett életkorra bemutatja az ezekben az életkorokban várható hátralévő élettartamot, feltéve, hogy az egyén megéri a szóban forgó életkort. Figyeljük meg, hogy egy 60 év körüli személynél ez a mutató évente körülbelül 0,7–0,8 évet, azaz 8–9 hónapot csökken.

7. táblázat
Várható férfi- és női élettartam 60, 62 és 65 éves korban Magyarországon, 2015

	Életkor		
	60	62	65
Férfi	17,3	16,0	14,4
Női	21,7	20,1	17,8

Forrás: ONYF [2016] 2.8. táblázat, 29. o.

Ha ezt a bonyodalmat figyelembe kívánjuk venni, akkor (6) helyett a (6'):

$$b^{\mathrm{N}}(R)=\frac{\tau(R-Q)w}{e(R)} \tag{6'}$$

képlettel kell számolnunk, ahol $e(R)$ az R éves korban várható feltételes várható élettartam. A továbbiakban gyakran elsiklunk efölött, és egyszerűen $D-R$ évvel számolunk (vö. *Banyár* [2012] és *Simonovits* [2012]).

4. TÉTEL • *A nyugdíjba vonulási kor éves változásakor a* (6) *nyugdíj százalékos változása a szolgálati idő reciprokának és a nyugdíjban töltött idő reciprokának az összege:*

$$\frac{db^{\mathrm{N}}(R)}{b^{\mathrm{N}}(R)dR}=\frac{1}{R-Q}+\frac{1}{D-R}. \tag{8}$$

BIZONYÍTÁS • Ismert, hogy a (8) bal oldala a (6) függvény logaritmikus deriváltja. Logaritmizálva (6)-ot ($w=1$ mellett):

$$\log b^{\mathrm{N}}(R)=\log\tau+\log(R-Q)-\log(D-R).$$

Elhagyva a $\log(\tau w)$ állandót, $\log(R-Q)-\log(D-R)$ deriváltját kell vennünk, s ez épp (8) jobb oldala. ■

SZEMLÉLTETÉS • A 3. TÉTEL utáni számpéldában $0{,}025+0{,}056=0{,}081$ adódik, s ez jól közelíti az általában szokásos szolgálati idő + bónusz növekedését. A *8. táblázat* 60 és 66 év között növelve a nyugdíjba vonulási kort bemutatja a nyugdíj/nettó bér, azaz a helyettesítési arány növekedését – pontatlan [(6)] és pontos [(6')] képlettel. A pontosítás lassítja, de nem szünteti meg a nyugdíj gyorsuló növekedését.

8. táblázat
Pontatlan és pontos helyettesítési arány – nyugdíjba vonulási kor

Nyugdíjba vonulási kor (év) R	Hátralévő élettartam (év) $e(R)$	Pontatlan	Pontos
		helyettesítési arány	
		$b^1(R)/v$	$b^2(R)/v$
60	19,4	0,744	0,744
61	18,7	0,805	0,792
62	18,0	0,873	0,844
63	17,3	0,949	0,900
64	16,6	1,035	0,961
65	15,9	1,134	1,027
66	15,2	1,247	1,099

Optimális nyugdíjba vonulási kor

Eddig kívülről választottnak vettük a dolgozók nyugdíjba vonulási idejét, R-t. Most felírunk egy szokványos hasznosságfüggvényt, s ennek maximalizálásából vezetjük le a nyugdíjba vonulási kort. Nem okoz gondot, hogy a speciális $b^N(R)$ függvény helyett az általános $b(R)$ nyugdíj–kor függvénnyel dolgozunk, csak azt kell feltennünk, hogy e függvény szigorúan növekvő és sima (deriválható).

A hasznosságfüggvény két részből áll: a dolgozók és a nyugdíjasok hasznosságfüggvénye, rendre arányosan a munkaviszony és a nyugdíjas lét hosszával. Az első függvény további két részből áll: a nyugdíjasok hasznosságfüggvényéhez hasonlóan értékeli a járulék után maradó fogyasztást, valamint a ξ_1 az R_m előtti és a $\xi_2 > 0$ az R_m utáni „munkafáradtság” okozta hasznosságveszteséget, jelölése: $\xi_2 \geq \xi_1 > 0$:

$$U(R) = (R_m - Q)[\log(1-\tau) - \xi_1] + (R - R_m)[\log(1-\tau) - \xi_2] + (D - R)\log b(R). \quad (9)$$

Szükségünk lesz még a határhasznosságra:

$$U'(R) = \left[\log(1-\tau) - \xi_2\right] - \log b(R) + (D - R)\frac{db(R)}{b(R)dR}. \quad (10)$$

5. TÉTEL • *A* (9) *életpálya-hasznosságfüggvény esetén az* R° *optimális nyugdíjba vonulási kor* a) *vagy kielégíti* a (10) *egyenletet* $[U'(R) = 0]$, *vagy* b) $R^{\circ} = R_m$, *ha* $U'(R_m) < 0$, *vagy* c) $R^{\circ} = R_M$, *ha* $U'(R_M) > 0$.

Nem elegendő az optimum megtalálása, értékelni kell a jóléti nyereséget is, amelyet az optimum ad – például a minimális nyugdíjkorhatárhoz képest. Amíg csak tudjuk, célszerű kerülni az életpálya-hasznosságfüggvények numerikus összehasonlítását. Ezért bevezetjük a *relatív hatékonyságot:* azt a pozitív skalárt, amellyel beszorozva a keresetet és a nyugdíjkorhatár-minimumhoz tartozó nyugdíjat, a módosított rendszer életpálya-hasznossága eléri az értékelt rendszerét az eredeti bér és nyugdíj mellett. Képletben: ε az a szám, amelyre

$$(R_m - Q)\{\log[(1-\tau)\varepsilon] - \xi_1\} + (D - R_m)\log[\varepsilon b(R_m)] = U(R).$$

Ahhoz, hogy kifejezhessük ε-t, át kell alakítani az egyenlet bal oldalát:

$$(R_m - Q)[\log(1-\tau) - \xi_1] + (R_m - Q)\log\varepsilon + (D - R_m)\log\varepsilon + (D - R_m)\log b(R_m) = U(R).$$

Bevezetve az $U(R_m)$ jelölést és rendezve:

$$(D - Q)\log\varepsilon = U(R) - U(R_m),$$

tehát

$$\varepsilon(R) = \exp\{[U(R) - U(R_m)]/(D - R_m)\}.$$

Szemléltetés • A továbbiakban az eszmei számlára szorítkozunk. Logaritmizálva (6)-ot ($w = 1$ mellett):

$$\log b^N(R) = \log\tau + \log(R - Q) - \log(D - R),$$

s utána deriválva (9)-et, adódik az eszmei számla belső optimális feltétele:

$$0 = U^{N'}(R) = \left[\log(1-\tau) - \xi_2\right] - \left[\log\tau + \log(R - Q) - \log(D - R)\right] + \frac{D - Q}{R - Q}. \qquad (11)$$

Megtartva korábbi paraméterértékeinket, $\xi_1 = 1{,}2$ a *9. táblázatban* a ξ_2 fáradtsági együtthatóra három értéket ($\xi_{2,1}, \xi_{2,2}, \xi_{2,3}$) választunk, és szándékosan szűkítjük a nyugdíjkor minimuma és maximuma alkotta szakaszt: $R_m = 61$ és $R_M = 66$. Gyenge fáradtságnál az optimális kor 66 év, hatékonysága 8,5 százalékkal magasabb a bázisnál. Közepes fáradtságnál az optimális kor 63 év, és a hatékonyság csak 1 százalékkal nagyobb. Végül erős fáradtságnál a minimális nyugdíjkorhatár az optimális, itt nincs javulás.

9. táblázat
Fáradtság, hatékonyság és optimális nyugdíjba vonulási kor, pontatlan

Nyugdíjba vonulási kor	Relatív hatékonyság (munkafáradtsági együttható)		
R	$\xi_{2,1} = 1{,}2$	$\xi_{2,2} = 1{,}6$	$\xi_{2,3} = 2$
61	1,000	1,000	*1,000*
62	1,028	1,008	0,988
63	1,051	*1,010*	0,970
64	1,068	1,006	0,948
65	1,080	0,997	0,920
66	*1,085*	0,982	0,888

Ha mégis a pontosabb (6’) képlettel számolunk, akkor érdemes kisebb fokú fáradtsággal számolni, hiszen most a gyengébbek kihalnak. A *10. táblázatban* az imént leírt jelenségek figyelhetők meg.

10. táblázat
Fáradtság, hatékonyság és optimális nyugdíjba vonulási kor, pontos

Nyugdíjba vonulási kor	Relatív hatékonyság (munkafáradtsági együttható)		
R	$\xi_{2,1}=0{,}9$	$\xi_{2,2}=1{,}1$	$\xi_{2,3}=1{,}3$
61	1,000	1,000	*1,000*
62	1,015	1,005	0,995
63	1,027	*1,007*	0,987
64	1,035	1,004	0,975
65	1,040	0,999	0,960
66	*1,040*	0,990	0,941

Részleges nyugdíjba vonulás

Áttekintésem fő részében nem akartam a tárgyalást azzal bonyolítani, hogy az életkor növekedésével a fáradtság fokozatosan növekszik, de a *Függelék* első részében és *Simonovits* [2018*c*]-ben több helyen is modelleztem ezt a jelenséget. Nem meglepő, hogy a teljes munkaidő alatti fokozatosan erősödő fáradtságot több országban – egyelőre sikertelenül – részleges nyugdíjba vonulással kívánják enyhíteni. Itt csak körvonalazom a megfelelő modellt.

Két nyugdíjba vonulási kort kell megkülönböztetni: R_1-et és R_2-t, $R_1 < R_2$, és a nyugdíjba vonulás részlegességi fokát: α-t ($0 < \alpha < 1$). Q és R_1 között a dolgozó teljes időben dolgozik, R_1 és R_2 között csak részlegesen, $1 - \alpha$ fokon. Ismét eltekintve az (R_1, R_2) időszakbeli haláltól, az eszmei számla most a következő:

$$\tau[(R_1 - Q) + (1 - \alpha)(R_2 - R_1)]w = [\alpha(R_2 - R_1) + D - R_2]b, \tag{5’}$$

azaz a teljes nyugdíj:

$$b^{\mathrm{N}}(R_1,\ R_2,\ \alpha) = \frac{\tau\left[(R_1 - Q) + (1-\alpha)(R_2 - R_1)\right]w}{\alpha(R_2 - R_1) + D - R_2}. \tag{8’}$$

Ha valaki mégis R_2-nél korábban megy nyugdíjba, akkor utólag könnyen csökkenthető a (8’) képletbeli nyugdíj.

Első közelítésként feltehetjük, hogy a részleges munkavégzés arányosan csökkenti a fáradtság okozta hasznosságvesztést:

$$\xi_\alpha = \alpha\xi_1 + (1 - \alpha)\xi_2.$$

Például $\alpha = 1/2$ esetén $\xi_{0,5} = (1{,}2 + 2)/2 = 1{,}6$.

Végül a módosított életpálya-hasznosságfüggvény:

$$U_\alpha(R) = (R_m - Q)[\log(1-\tau) - \xi_1] + (R_1 - R_m)[\log(1-\tau) - \xi_2] + \\ + (R_2 - R_1)\{\log[(1-\alpha)(1-\tau) + \alpha b^N(R_1, R_2, \alpha)] - \xi_\alpha\} + (D - R_2)\log b^N(R_1, R_2, \alpha). \quad (9')$$

A *11. táblázat* általánosítja a *9. táblázatot*, $\alpha = 1/2$-del. Természetesen $R_1 = R_2$ esetén α értéke közömbös, a kimenetek megegyeznek a *9. táblázat* megfelelő sorával. (Nem vállalkozunk a *10. táblázat* általánosítására.) A kisfokú fáradtság esetén a részleges nyugdíjba vonulás nem javít a rendszeren (legalábbis a bemutatott tartományban), de a közepes fáradtságnál javít: az $R = 61$-es 1 százalékos javítás helyett az $(R_1, R_2) = (61, 66)$-os pár 3,5 százalékot javít. Szerényebb a javítás az erős fáradtságnál: az $(R_1, R_2) = (61, 65)$-ös párnál 1 százalék.

11. táblázat
Fáradtság, hatékonyság és optimális (részleges) nyugdíjba vonulási kor

Részleges	Teljes	Relatív hatékonyság (munkafáradtsági együttható)		
nyugdíjba vonulási kor				
R_1	R_2	$\xi_{2,1} = 1{,}2$	$\xi_{2,2} = 1{,}6$	$\xi_{2,3} = 2$
61	61	1,000	1,000	1,000
	62	1,015	1,010	1,005
	63	1,029	1,019	1,008
	64	1,041	1,026	1,010
	65	1,052	1,031	1,010
	66	1,061	1,035	1,009
62	62	1,028	1,008	0,988
	63	1,041	1,015	0,990
	64	1,051	1,020	0,990
	65	1,061	1,024	0,989
	66	1,069	1,027	0,986
	...		...	
66	66	1,085	0,982	0,888

Heterogén élettartam

Eddig feltettük, hogy a népesség a várható élettartam szerint homogén. Most feloldjuk ezt a feltevést (de egyelőre lemondunk az optimalizálásról). A kézenfekvő női–férfi különbséget figyelmen kívül hagyva, itt a rövidebb (L) és hosszabb (H) várható élettartamú egynemű dolgozókat mérlegeljük: $Q < D_L < D_H$, népességbeli súlyuk $f_L > 0$ és $f_H > 0$, $f_L + f_H = 1$.[3]

[3] *Eső–Simonovits* [2003] és *Simonovits–Tóth* [2007] tetszőleges számú típussal dolgozott, itt csak a könnyebbség kedvéért szorítkozunk két típusra.

Feltesszük, hogy egyszerre állnak munkába, de különbözik a nyugdíjba vonulási koruk: $Q<R_L<R_H$. Feltesszük, hogy a hosszabb várható élettartamú típus is előbb megy nyugdíjba, mintsem a rövidebb várható élettartamú meghal:

$$R_H<D_L. \tag{12}$$

Továbbra is homogén egységbérrel ($w=1$), de már átlagélettartammal számolva: $\bar{D}=f_L D_L+f_H D_H$, az új eszmei számlabeli nyugdíjképlet:

$$b^{\mathrm{N}}(R)=\frac{\tau(R-Q)}{\bar{D}-R}. \tag{13}$$

A következő meglepő eredményt kapjuk a típusfüggő életpálya-egyenlegekre, amelyek általános képlete: $z=\tau(R-Q)-b(\bar{D}-R)$.

6. TÉTEL • a) *Heterogén népesség és a* (13) *eszmeiszámla-képlet esetén a rövidebb várható élettartamúak több, a hosszabb várható élettartamúak kevesebb járulékot fizetnek, mint kellene:*

$$z_L>0>z_H. \tag{14}$$

b) *Az átlagos életpálya-egyenleg is negatív:*

$$\bar{z}^{\mathrm{N}}=f_L z_L^{\mathrm{N}}+f_H z_L^{\mathrm{N}}<0. \tag{15}$$

BIZONYÍTÁS • *a)* Egyelőre elhagyjuk a típusindexet. Behelyettesítve (13)-at (7)-be, és közös nevezőre hozva a két tagot:

$$z^{\mathrm{N}}(R,D)=\tau(R-Q)-\frac{\tau(R-Q)}{\bar{D}-R}(D-R)=\frac{\tau(R-Q)}{\bar{D}-R}(\bar{D}-R-D+R)=$$
$$=b^{\mathrm{N}}(R)(\bar{D}-D) \tag{16}$$

Mivel $D_L<\bar{D}<D_H$, ezért (16) miatt (14) áll.
b) Visszaírjuk (16)-ba a típusindexet, s behelyettesítjük a kapott képletet (15)-be:

$$\bar{z}^{\mathrm{N}}=f_L b^{\mathrm{N}}(R_L)(\bar{D}-D_L)+f_H b^{\mathrm{N}}(R_H)(\bar{D}-D_H). \tag{17}$$

$R_L<R_H$ szerint $b^{\mathrm{N}}(R_L)<b^{\mathrm{N}}(R_H)$, és $\bar{z}$ első tagja pozitív. Ezért ha $b^{\mathrm{N}}(R_L)$ helyett $b^{\mathrm{N}}(R_H)$-t írunk, akkor növekszik a jobb oldal, a kapott kifejezés viszont $b^{\mathrm{N}}(R_H)$-szor nulla. ■

Diamond személyes tanácsát követve, a várható (átlagos) hiányt könnyen meg lehet szüntetni, csak arányosan csökkenteni kell a kifizetéseket. N index helyett A-t írva:

$$b^{\mathrm{A}}(R)=\frac{\zeta\tau(R-Q)}{\bar{D}-R}=\zeta b^{N}(R), \qquad 0<\zeta<1. \tag{18}$$

Bevezetjük az átlagos életpályanyugdíj és átlagos nyugdíjba vonulási kor jelölését:

$$\bar{B}^{\mathrm{N}}=f_L b_L^{\mathrm{N}}(D_L-R_L)+f_H b_H^{\mathrm{N}}(D_H-R_H) \qquad \text{és} \qquad \bar{R}=f_L R_L+f_H R_H, \tag{19}$$

s velük megfogalmazható a

7. TÉTEL • *A várható (átlagos) hiányt megszüntető, arányosan csökkentett eszmei nyugdíj* [(18) képlet] *egyensúlyi zsugorító tényezője:*

$$\zeta = \frac{\bar{B}^{\mathrm{N}}}{\tau\left(\bar{R} - Q\right)}. \tag{20}$$

SZEMLÉLTETÉS • Legyen $D_L = 70$, $D_H = 80$; $R_L = 58$, $R_H = 63$ év, $f_L = 1/2 = f_H$. A *12. táblázatból* látható, hogy zsugorítás nélkül az eszmei számla hiányt termel. A zsugorítás eltüntette az eszmei számla átlagos hiányát, de a rövid várható élettartamúaktól továbbra is többéves teljes bérköltségnyi jövedelem áramlik a hosszabb várható élettartamúakhoz.

12. táblázat
Eredeti és zsugorított eszmei számla

Zsugorító szorzó	Rövid élettartamúak		Hosszú élettartamúak		Átlagos egyenleg
	nyugdíja	egyenlege	nyugdíja	egyenlege	
ζ	b_L	z_L	b_H	z_H	$\bar{z}$
1	0,458	2,291	0,735	–3,673	–0,691
0,923	0,423	2,714	0,678	–2,714	0,000

MEGJEGYZÉS • 1. Egyszerű általánosítással behozható a keresetek heterogenitása: $0 < w_L < 1 < w_H$ és $f_L w_L + f_H w_H = 1$, sőt a *6. tétel* is érvényben marad.

2. A svéd rendszerben vélhetően azért nem lép fel az itt jelzett hiány, mert a rendszer eleve hatalmas tartalékkal működik, és folyamatosan módosítják a kifizetést.

Töredezett munkapályák hatása szenioritási nyugdíj mellett

Augusztinovics [2005] és *Augusztinovics–Köllő* [2007] felismerte, hogy a munkapályák töredezettsége jelentősen befolyásolja a nyugdíjrendszer viselkedését. Később *Czeglédi és szerzőtársai* [2016], *Granseth és szerzőtársai* [2019] empirikusan megvizsgálták a töredezett munkapálya és a nyugdíjba vonulási idő kapcsolatát Magyarországon, valamint három másik országban: Ausztriában, Németországban és Svédországban. Itt elválik az S szolgálati idő a potenciális szolgálati időtől, az $R - Q$-tól.

Vezessük be a φ folytonossági szorzót, ekkor a szolgálati idő:

$$S = \varphi(R - Q), \qquad 0 < \varphi \leq 1. \tag{21}$$

Állandó reálbért és árindexálást feltételezve, az eszmei nyugdíj képlete értelemszerűen:

$$b^{\mathrm{N}}\left(R,\ S\right) = \frac{\tau S}{\bar{D} - R} = \frac{\tau\varphi\left(R - Q\right)}{\bar{D} - R}. \tag{22}$$

Különféle megfontolásokból ezt a képletet Magyarországon (de másutt is) egyszerűsítik, és bilineárissá teszik:

$$b(R, S) = \delta S[1 + \alpha(R - R^*)]v, \qquad (23)$$

ahol $\delta > 0$ az egyévnyi szolgálati idő értéke a nettó kereset függvényében, R^* az általános nyugdíjkorhatár, és $\alpha > 0$ az éves túldolgozás bónusza, az éves előrehozott nyugdíj málusza.

Szemléltetés • A magyar nyugdíjrendszerben a δS képlet helyett egy feleslegesen bonyolultan cikcakkos függvény áll, de mivel mi az utolsó szakaszra összpontosítjuk a figyelmünket, elegendő a lineáris változat: $\delta = 0{,}02$, ha $S^* = 40 \leq S \leq 50$. (Még ez sem igaz, mert minden értéket éves szinten lefelé kerekítenek.) A bónusz $\alpha = 0{,}06$ (havonta 0,5 százalék).

A *13. táblázatban* a szolgálati idő 38 és 44 év között, míg a nyugdíjba vonulási kor 60 és 63 év között változik, az általános nyugdíjkorhatár 63 év (2016). Mivel itt nincs csökkentésmentesség, sor és oszlop szerint is nő a bilineáris nyugdíj helyettesítési aránya: a legkisebb 0,623, a legnagyobb 0,880.

13. táblázat
Bilineáris nyugdíjfüggvény értékei, 2016

Szolgálati idő (S)	Nyugdíjba vonulási kor (R)			
	60	61	62	*63*
38	0,623	0,669	0,714	0,760
40	0,656	0,704	0,752	0,800
42	0,689	0,739	0,790	0,840
44	0,722	0,774	0,827	0,880

2012 előtt Magyarországon különféle szenioritási (hosszú szolgálati idő utáni kedvezményes) rendszerek működtek, amelyek megfelelően hosszú – naptári évtől, nemtől és szolgálati időtől bonyolultan függő – szolgálati idő esetén kikapcsolták (vagy csökkentették) a máluszt. Képletben (S_m a küszöbérték és $\overline{v}$ az átlagos nettó életpálya-kereset):

$$b(R, S) = \delta S\overline{v}, \qquad \text{ha}$$

$$\text{vagy} \quad S \geq S_m, \quad R < R_t^*, \quad \text{vagy} \quad S < S_m, \quad R = R_t^*.$$

Még ezt a viszonylag alacsony, de gyorsan emelkedő általános korhatárt is kevesen lépték túl. Megjegyezzük azonban, hogy a bónuszt másképp számolták 2004 előtt, mint 2004 óta: 2004 előtt az éppen esedékes általános korhatár volt az alap, 2004 óta a nyugdíjba vonuló egyén évjáratára vonatkozó érték. Tehát ha egy nő 2003-ban 70 évesen ment nyugdíjba, akkor $11 = 70 - 59$ évre kapott évi 6 százalékos jutalmat, 2004-ben viszont $15 = 70 - 55$ évre, hiszen az 1934-es évjáratra eredetileg még 55 év vonatkozott.

A szenioritási nyugdíjat a 2011-től érvényes Nők40 példáján szemléltetjük: $S_\mathrm{m} = 40$. A *14. táblázatban* az 1. sor 1–3. cellája üres, aztán a 0,76 stb. (A valóságban

0,77 a pontosabb érték.) A 2. sortól ($S = 40$) kezdve a nyugdíjba vonulási korig nem nő a nyugdíj (ez méltánytalan), aztán belép a bónusz. Ugyanakkor a *14. táblázat* főátló alatti részében megjelenik a Nők40 kedvezménye: például egy 60 évesen 44 éves szolgálati idővel nyugdíjba vonuló nő 0,722 helyett 0,88 nettó bérnek megfelelő nyugdíjat kap.

14. táblázat
Hosszú szolgálati idő szerint kedvezményezett nyugdíj (szenioritás), 2016

Szolgálati idő (*S*)	Nyugdíjba vonulási kor (*R*)			
	60	61	62	*63*
38	–	–	–	0,76
40	0,80	0,80	0,80	0,80
42	0,84	0,84	0,84	0,84
44	0,88	0,88	0,88	0,88

Megismételve a korábban leírtakat, a magyar nyugdíjrendszer 2011/2012 óta egyszerre nagyon laza és nagyon merev:

1. laza, mert minden nő, akinek a jogosultsági időszaka elérte a 40 évet, bármikor – aktuáriusi csökkentés nélküli járadékkal – nyugdíjba mehet (Nők40);
2. merev, mert minden, legfeljebb 39 évi jogviszonyt elérő nőnek és akármilyen jogviszonyú férfinak viszont be kell töltenie az általános nyugdíjkorhatárt. Ezért elegendő csak a nők nyugdíjba vonulási jellemzőit belesűríteni a *15. táblázatba*.

15. táblázat
Általános nyugdíjkorhatár és az új női nyugdíjasok jellemzői, Magyarország

Év	Általános korhatár	Összes		Nők40	
		nyugdíjba vonulási életkor	létszám	nyugdíjba vonulási életkor	létszám
	év	év	ezer fő	év	ezer fő
2011	62,0	58,5	85,0	57,6	54,8
2012	62,0	59,2	51,2	57,8	26,6
2013	62,0	59,6	40,2	58,0	24,1
2014	62,5	59,6	39,1	58,3	27,6
2015	62,5	60,0	41,6	58,7	28,6
2016	63,0	61,0	55,0	59,0	29,0
2017	63,5	60,9	45,0	59,3	28,4

Megjegyzés: a féléves nyugdíjkorhatár azokra vonatkozik, akik páros/páratlan év első, illetve második felében születtek.
Forrás: Fazekas–Köllő (szerk.) [2018] 287. o., 11.3. táblázat.

A nők nyugdíjba vonulási kora és szolgálati ideje együttes eloszlását tömörítve a *16. táblázat* mutatja be. A középső magnak három nem üres cellája van: *1.* korai nyugdíjasok, legalább 40 éves jogviszonnyal, *2.* korbetöltött nyugdíjasok, rövid jogviszonnyal és *3.* azok, akik egyszerre érték el a 40 éves jogviszonyt és a 63 éves korhatárt. Míg a korai nyugdíjba vonulók átlagos életkora csak 58,6 év, addig a korhatáron viszszavonulók várható szolgálati ideje csak 31,4 év. (Meglepő, hogy a *14.* és a *16. táblázat* adatai között jelentős eltérés mutatkozik.)

16. táblázat
Szolgálati idő és nyugdíjba vonulási kor együttes eloszlása, 2016, nők (százalék)

Szolgálati idő (S)	Kor (R)		
	korai nyugdíjkor	általános korhatáron	összesen
Rövid ($S=31{,}4$ év)	–	55,1	55,1
Elegendő ($S_{\mathrm{m}}=41{,}2$ év)	35,5	8,9	44,9
Átlagosan [$\mathbf{E}(S)=37{,}8$ év]	35,5	64,0	100,0

Forrás: közérdekű adatigényléssel a Magyar Államkincstártól.

A korábban bemutatott modellek egy részében automatikusnak vettük, hogy a nyugdíjba vonulási kor és a szolgálati idő között erős pozitív korreláció van. Most a Berkson-paradoxonnal kerülünk szembe (*Berkson* [1946]), ahol egy speciális szűrési mechanizmus megváltoztatja az eredeti korrelációs együttható előjelét.

Bevezetve a $p=\mathbf{P}(R=R^*)$ és $q=\mathbf{P}(S=S_{\mathrm{m}})$ valószínűséget, és elhanyagolva a csoportokon belüli szórásokat, a korrelációs együttható

$$r(R,\ S)=-\sqrt{\frac{pq}{(1-p)(1-q)}}.$$

Numerikusan: $p=0{,}551$ és $q=0{,}355$; $r(R,\ S)=-0{,}822$. A belső szórások figyelembevétele leviszi a korrelációs együtthatót $-0{,}6$-re, majd $-0{,}53$-ra.

A Nők40 bumerángja

Eddig időben állandónak vettük a reálbéreket, most feloldjuk ezt a feltevést. Most már mindenképpen át kell térnünk diszkrét időre, mert a nyugdíjakat évente egyszer indexálják. (Az év végi korrekció beolvasztható lenne a következő évi nyugdíjba.) Az inflációtól továbbra is eltekintünk. Az egyszerűség kedvéért csak egyetlenegy női dolgozóval számolunk, aki mindig az átlagbért keresi (a magas kereset reális feltevés). A továbbiakban szükségünk lesz a 2010 utáni magyar nettóbérdinamikára, amelyet a *17. táblázat* ad meg.

Most t azt a naptári évet jelöli, amikor a példánkban szereplő nő a Nők40-et leghamarabb igénybe veheti, és s azoknak az éveknek a számát jelöli, amennyivel elhalasztja a visszavonulását. Ekkor a halasztott nyugdíj és a maximalizálandó életpályanyugdíj rendre:

$$b_{t,s} = \delta(S_m + s)v_{t+s-1} \quad \text{és} \quad B_{t,s} = (T - S_m)b_{t,s}.$$

$Q = 19$ és $T = 20$ év nyugdíjban töltött év és $\delta = 0{,}02$ járadékszorzó alapján kiszámítható a *18. táblázat* 3. és 4. oszlopa: a $b_{t,s}$ nyugdíj és a $B_{t,s}$ nyugdíjtömeg alakulását mutatja, és mindkét blokkban dőlten szedve látszik a maximális nyugdíjtömeg. A *Simonovits* [2019] tanulmányból itt a rövidség kedvéért elhagyjuk a mellékszabályokat (túlindexálás 2013 és 2016 között, nyugdíjprémium és Erzsébet-utalvány 2017-ben és 2018-ban); csak a 2012-ben és a 2016-ban kezdődő karriereket hasonlítjuk össze. Az elsőben a Nők40 program azonnali igénybevétele valóban optimális volt, de a másodikban már érdemes lett volna három évet tovább dolgozni.

17. táblázat
Magyar nettó reálbérek idősora, 2010=1

Év t	Nettó reálbér v_t	Év t	Nettó reálbér v_t
2010	1,000	2015	1,098
2011	1,024	2016	1,179
2012	0,989	2017	1,299
2013	1,020	2018	1,403
2014	1,052		

Megjegyzés: $v_{2010} = 132{,}6$ ezer forint.

18. táblázat
Mennyire érdemes halasztani a Nők40-et?

Legkorábbi év	Halasztási év	Kezdő reálnyugdíj	Életpálya-reálnyugdíj
t	s	$b_{s,t}$	$B_{s,t}$
2012	0	0,819	*16,4*
2013	1	0,811	15,4
2014	2	0,857	15,4
2015	3	0,905	15,4
2016	0	0,878	17,6
2017	1	0,967	18,4
2018	2	1,091	19,6
2019	3	1,207	*20,5*

Megjegyzés: minden nyugdíjérték a 2010-es éves átlagos nettó bérben van kifejezve.

Természetesen ez a következtetés feltételezi, hogy ha a dolgozó nem, de legalább a kormányzat érti a dolgát. Ez utóbbi szakemberei megtehették volna, különösen a hosszú távra tervezett 2016–2022-es bérmegállapodás kezdete óta, hogy minden olyan nő, aki jogosult a Nők40-re, kap egy egyszerű papírt, amely elmagyarázza a fentieket.

Lehet a következtetést tompítani, ha figyelembe vesszük a leszámítolást vagy a korlátozott időbeni helyettesítést. *Simonovits* [2019]-ben ezt megtettem, de ez a finomítás eltakarta a lényeget.

Következtetések

Áttekintésünk végére értünk. Elindultunk a legegyszerűbb modellből, ahol a merev korhatár emelésével nemcsak a népességöregedésen, hanem egyéb nyugdíjgondokon (például az alacsony foglalkoztatási hányadon) is segíthet a kormányzat. A rugalmas korhatárt az eszmei számlán vizsgáltuk meg homogén és heterogén várható élettartam esetén, bekapcsolva az életpálya-hasznosság maximalizálását is. Aztán kiléptünk a töredezett munkapályák világába is, ahol bonyolódott a helyzet: a szenioritási (hosszú szolgálati idő utáni kedvezményes) nyugdíj bevezetése méltánytalanul sújtotta a töredezett munkapályájúakat. A reálbérnövekedést is figyelembe véve igazi meglepetés ért: a Nők40 program 2012-ben még adott, de 2013-ban már elvett a sietősen nyugdíjba vonuló kedvezményezettektől. A *Függelék* első részében bemutatjuk az optimális életpálya-hasznosságfüggvényt maximalizáló munkakínálati és megtakarítási pályát, amikor nincs nyugdíj. A *Függelék* második részében a mechanizmustervezés nagyon kifinomult elméletét alkalmazzuk, ahol a nyugdíjba vonulók az időpontot és a nyugdíjat egy menüből optimálisan kiválasztják.

Áttekintésünkből számos fontos kérdés kimaradt. Itt csak a két legsúlyosabb mulasztást emeljük ki, mindkettő a bérindexáláshoz képest értékeli az árindexálást: *1. Diamond* [2004] leírta, *Legros* [2006] és *Simonovits* [2018*b*] modellezte, hogy az így adódó nagyobb kezdő nyugdíj kedvezőbb a várhatóan rövidebb életűeknek; *2.* kitolja az optimális nyugdíjba vonulást.

Tanulság: az egyszerű modellek hasznosak, mert könnyen megérthetők, és velük ellenőrizhetjük a bonyolult modelleket is. De sohasem szabad elfelejtenünk, hogy a világ bonyolult, és végül is sohasem érünk a vizsgálódások végére.

Hivatkozások

Augusztinovics Mária [2005]: Népesség, foglalkoztatottság, nyugdíj. Közgazdasági Szemle, 52. évf. 5. sz. 429–447. o.

Augusztinovics Mária–Köllő János [2007]: Munkapiaci pálya és nyugdíj: 1970–2020. Közgazdasági Szemle, 54. évf. 6. sz. 529–559. o.

Banyár József [2012]: Javaslat az optimális járadékfüggvényre. Szigma, 42. évf. 3–4. sz. 105–124. o.

Berkson, J. [1946]: Limitations of the Application of Fourfold Table Analysis to Hospital Data. Biometrics Bulletin, Vol. 2. No. 3. 47–53. o. https://doi.org/10.2307/3002000.

Bommier, A.–Leroux, M.-L.–Lozachmeur, J.-M. [2011]: Differential Mortality and Social Security. Canadian Journal of Economics, Vol. 44. No. 1. 273–289. o. https://doi.org/10.1111/j.1540-5982.2010.01632.x.

Borlói Rudolf [2016]: Gondolatok a magyar nyugdíjrendszerről. Gondolat, Budapest.

Crawford, V. P.–Lilien, D. M. [1981]: Social Security and Retirement Decision. Quarterly Journal of Economics, Vol. 96. No. 3. 479–529. o. https://doi.org/10.2307/1882684.

Cremer, H.–Lozachmeur, J.-M.–Pestieau, P. [2008]: Social Security and Retirement Decision: A Positive and Normative Approach. Journal of Economic Surveys, Vol. 22. No. 2. 213–233. o. https://doi.org/10.1111/j.1467-6419.2007.00528.x.

Czeglédi Tibor–Simonovits András–Szabó Endre–Tir Melinda [2016]: Nyugdíjba vonulási szabályok Magyarországon: nyertesek és vesztesek. Közgazdasági Szemle, 63. évf. 12. sz. 1261–1288. o. https://doi.org/10.18414/ksz.2016.12.1261.

Diamond, P. A. [2003]: Taxation, Incomplete Markets and Social Security. Munich Lectures. MIT Press, Cambridge, MA.

Diamond, P. A. [2004]: Social Security. American Economic Review, Vol. 94. No. 1. 1–24. o. https://doi.org/10.1257/000282804322970670.

Diamond, P. A.–Mirrlees, J. [1978]: A Model of Social Insurance with Variable Retirement. Journal of Public Economics, Vol. 10. No. 3. 295–336. o. https://doi.org/10.1016/0047-2727(78)90050-6.

Eső Péter–Simonovits András [2003]: Optimális járadékfüggvény tervezése rugalmas nyugdíjrendszerre. Közgazdasági Szemle, 50. évf. 2. sz. 99–111. o.

Fabel, O. [1994]: The Economics of Pensions and Variable Retirement Schemes. Wiley, New York.

Fazekas Károly–Köllő János (szerk.) [2018]: Munkapiaci Tükör. MTA KRTK KTI, Budapest.

Gál Róbert Iván–Radó Márta [2019]: Participation and postponed retirement in Central and Eastern Europe. Institute of Demography, Budapest, WP 31. https://doi.org/10.21543/wp.2019.31.

Granseth, E.–Keck, W.–Nagl, W.–Simonovits, A.–Tir, M. [2019]: Negative Correlation between Retirement Age and Contribution Length? Oxford Economic Papers, megjelenés alatt.

Gruber, J.–Wise, D. A. (szerk.) [1999]: Social Security and Retirement Program Around the World. Chicago University Press, Chicago.

Holtzer Péter (szerk.) [2010]: Jelentés a Nyugdíj és Időskor Kerekasztal tevékenységéről. Miniszterelnöki Hivatal, Budapest.

Holzmann, R.–Palmer, E. (szerk.) [2006]: Pension Reforms: Issues and Prospects of Nonfinancial Defined Contribution (NDC) Schemes. World Bank, Washington, DC, https://doi.org/10.1596/978-0-8213-6038-5.

Knell, M. [2018]: Increasing Life Expectancy and NDC Pension Systems. Journal of Pension Economics and Finance, Vol. 17. No. 2. 170–199. o. https://doi.org/10.1017/s1474747216000226.

Legros, F. [2006]: NDCs: A Comparison of French and German Point Systems. Megjelent: *Holzmann–Palmer* (szerk.) [2006] 203–238. o. https://doi.org/10.4135/9781526443311.

Mincer, J. A. [1974]: Schooling, Experience, and Earnings. Columbia University Press (for NBER), New York.

Molnár D. László–Hollósné Marosi Judit [2015]: Az öregségi nyugdíjasok halandósága. Közgazdasági Szemle, 62. évf. 12. sz. 1258–1290. o. https://doi.org/10.18414/ksz.2015.12.1258.

ONYF [2016]: Statisztikai Évkönyv, 2015. Országos Nyugdíjbiztosítási Főigazgatóság, Budapest, https://old.onyf.hu/m/pdf/Statisztika/ONYF_Statisztikai_Eevkoenyv_2015_nyomdai.pdf.

Pestieau, P.–Ponthiere, G. [2016]: Longevity Variation and the Welfare State. Journal of Economic Demography, Vol. 82. No. 2. 207–239. o. https://doi.org/10.1017/dem.2016.4.

Sheshinski, E. [1978]: A Model of Social Security and Retirement Decisions. Journal of Public Economics, Vol. 10. No. 3. 337–360. o. https://doi.org/10.1016/0047-2727(78)90051-8.

Simonovits András [2002*a*]: Rugalmas nyugdíjkorhatár és optimális lineáris járulék- és járadékfüggvény. Közgazdasági Szemle, 49. évf. 9. sz. 713–724. o.

Simonovits András [2002*b*]: Nyugdíjrendszerek: tények és modellek. Typotex, Budapest.

Simonovits András [2004*a*]: Optimális rugalmas nyugdíjrendszer tervezése. Biztosításmatematikai semlegesség és hatékonyság. Közgazdasági Szemle, 51. évf. 12. sz. 1101–1112. o.

Simonovits András [2004*b*]: Rugalmas öregkori nyugdíjszabály optimális tervezése két típus esetén. Szigma, 35. évf. 9. sz. 13–39. o.

Simonovits András [2012]: Még egyszer az eszmei számla elvi hibájáról. Szigma, 42. évf. 3–4. sz. 145–161. o.

Simonovits András [2015]: Hogyan hat a nyugdíjszabályok hiányos ismerete a dolgozók döntéseire? Közgazdasági Szemle, 62. évf. 3. sz. 263–283. o.

Simonovits András [2018*a*]: Merevség és rugalmasság a magyar nyugdíjrendszerben. Szigma, 59. évf. 1–2. sz. 1–10. o.

Simonovits András [2018*b*]: Miért kell a nyugdíjvalorizálást és -indexálást pontrendszerrel felváltani? Közgazdasági Szemle, 65. évf. 9. sz. 903–922. o. https://doi.org/10.18414/ksz.2018.9.903.

Simonovits András [2018*c*]: Simple Models of Income Redistribution. Palgrave, https://doi.org/10.1007/978-3-319-72502-4.

Simonovits András [2019]: Nők40 és a reálbérrobbanás. Szigma, közlésre elfogadva.

Simonovits András–Tóth János [2007]: Új eredmények az optimális tervezésről. Közgazdasági Szemle, 54. évf. 7–8. sz. 628–643. o.

Swedish Pensions Agency [2017]: Orange Report: Annual Report of the Swedish Pension System 2016. Swedish Pensions Agency, Stockholm.

Waldron, H. [2001]: Links between Early Retirement and Mortality. ORES Working Paper, No. 93. Division of Economic Research, SS Administration, https://www.ssa.gov/policy/docs/workingpapers/wp93.pdf.

Függelék

Optimális munkakínálat nyugdíjrendszer nélkül

A főszövegben nagyon leegyszerűsítve tárgyaltuk az idős korral járó fokozott elfáradás hasznossági és órabércsökkentő hatását [(9)], és kihagytuk a magánmegtakarítást. A *Függelék* ezen részében részletesen tárgyaljuk mindkét tényezőt: egy reprezentatív egyén optimális munkakínálat–kor pályáját számítjuk ki, viszont eltekintünk a kötelező nyugdíjrendszer létezésétől. Minden dolgozó magának takarít meg, s a keletkezett vagyont időskorában feléli. Technikai egyszerűsítések: nincs népesség-, illetve termelékenységnövekedés. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$a = Q, \ldots, D-1$ életkor,
$l_a \geq 0$ formális munkakínálat a évesen,
$w_a \geq 0$ szuperbruttó órabér a évesen,
s_a az a-adik évi megtakarítás, tetszőleges előjelű valós szám.
A modell egyenletei a következők
Fogyasztás:

$$c_a = w_a l_a - s_a. \tag{F1}$$

A megtakarítás nem kamatozik, és az életpályaösszeg nulla:

$$\sum_{a=Q}^{D-1} s_a = 0. \tag{F2}$$

Az egyén a fogyasztás és a szabadidő nyújtotta éves hasznosságot nem számítolja le, az utóbbi fajlagosan nem csökken, sőt egy küszöb fölött az életkorral nő, viszont lemondunk a szabadidő értékének forintosításáról. Természetes alapú logaritmussal dolgozva, az életpálya-hasznosságfüggvény:

$$U\left(l_Q, c_Q, \ldots, l_{D-1}, c_{D-1}\right) = \sum_{a=Q}^{D-1}\left[\log c_a + \xi_a \log\left(1-l_a\right)\right], \quad 0 < \xi_Q \leq \ldots \leq \xi_{D-1}.$$

Felhasználva az (F1) fogyasztási egyenletet, a közvetett életpálya-hasznosságfüggvény:

$$U\left(l_Q, s_Q, \ldots, l_{D-1}, s_{D-1}\right) = \sum_{a=Q}^{D-1}\left[\log\left(w_a l_a - s_a\right) + \xi_a \log\left(1-l_a\right)\right].$$

Mincer [1974] szerint a keresztmetszeti órabérek az életkorral először nőnek, majd csökkennek, mi csak az időskori részre figyelünk, amelynek még termelékeny határait R_{m} és R_{M} jelöli:

$$w_{R_{\mathrm{m}}} \geq \ldots \geq w_{R_{\mathrm{M}-1}} > 0 = w_{R_{\mathrm{M}}} = \ldots = w_{D-1}.$$

Szükségünk lesz a következő jelölésekre:
$R = R_{\mathrm{m}}, R_{\mathrm{m}}+1, \ldots, R_{\mathrm{M}}-1, R_{\mathrm{M}}$ (a későbbi nyugdíjba vonulási kor),

$$T = D - Q, \quad X_R = \sum_{a=Q}^{R-1} \xi_a \quad \text{és} \quad W_R = \sum_{a=Q}^{R-1} w_a.$$

Nyugdíjrendszer nélküli modellünkben az optimális munkakínálati–megtakarítási pálya egyszerűen jellemezhető, ha teljesül a következő feltétel: létezik legalább egy olyan alkalmas R természetes szám R_{m} és R_{M} között, amelyre teljesül:

$$\frac{w_{R-1}}{\xi_{R-1}} > c\left(R\right) = \frac{W_R}{X_R + T}. \tag{F3}$$

Valóban, (F5a) szerint ekkor R életkor előtt az egyén dolgozik, utána nem, és fogyasztása mindvégig $c(R)$. Formálisan:

F1. TÉTEL • *Ha nincs nyugdíjrendszer, akkor az* (F3) *feltevés mellett az R optimális fogyasztási pályát adó* (c_a, l_a, s_a) *fogyasztás–munka–megtakarítási pálya*

$$c_a^* = c(R), \quad a = Q, \ldots, D-1, \tag{F4}$$

valamint

$$l_a^* = 1 - \frac{\xi_a}{w_a} c(R) > 0, \quad s_a^* = w_a - (\xi_a + 1)c(R), \quad \text{ha} \quad a = Q, \ldots, R-1, \tag{F5a}$$

és

$$l_a^* = 0, \quad s_a^* = -c(R), \quad \text{ha} \quad a = R, \ldots, D-1. \tag{F5b}$$

1. MEGJEGYZÉS • Később az F1. PÉLDÁBAN foglalkozunk majd az ($F3$) feltevéssel.
2. MEGJEGYZÉS • A leszámítolás hiánya és a nulla reálkamatláb miatt az optimális fogyasztás független az életkortól.

BIZONYÍTÁS • Legyen λ az ($F2$) korlát Lagrange-szorzója, azaz a feltételes optimalizálás Lagrange-függvénye:

$$\mathcal{L}\left(l_Q, s_Q, \ldots, l_{D-1}, s_{D-1}\right) = \sum_{a=Q}^{D-1}\left[\log\left(w_a l_a - s_a\right) + \xi_a \log\left(1 - l_a\right) + \lambda s_i\right]. \tag{F6}$$

Vegyük az $\mathcal{L}$ függvény l_a és s_a szerinti parciális deriváltját, írjuk vissza c_a-t, és tegyük a deriváltakat nullával egyenlővé:

$$\mathcal{L}'_{l_a} = \frac{w_a}{c_a} - \frac{\xi_a}{1 - l_a} = 0, \quad \text{ha} \quad l_a > 0; \quad w_a < \xi_a c_a, \quad \text{ha} \quad l_a = 0, \tag{F7}$$

valamint

$$\mathcal{L}'_{s_a} = \frac{1}{c_a} + \lambda = 0. \tag{F8}$$

($F8$)-ból adódik, hogy a fogyasztás életkortól független, állandó: $c_a = c$, $a = Q, \ldots, D-1$.
($F7$)-et rendezve és ($F1$)-et felhasználva:

$$l_a = 1 - \frac{\xi_a}{w_a} c > 0 \quad \text{és} \quad s_a = w_a - (\xi_a + 1)c(R), \quad \text{ha} \quad a = Q, \ldots, R_{\mathrm{M}} - 1,$$

illetve

$$l_a = 0 \quad \text{és} \quad s_a = -c, \quad \text{ha} \quad a = R_{\mathrm{M}}, \ldots, D-1.$$

A megtakarítási egyenleteket behelyettesítve ($F2$)-be és felhasználva a T, X_R és W_R jelöléseket, adódik $(X_R + T)c(R) = W_R$, azaz ($F4$), majd ($F5$).
Ellenőriznünk kell még, hogy (F5a) teljesül. Behelyettesítve ($F4$)-et

$l_{R-1}^* = 1 - \frac{\xi_{R-1}}{w_{R-1}} c(R) > 0$-ba, s ez az ($F3$) feltevésünkkel ekvivalens. ■

A tételt egy egyszerű számpéldán szemléltetjük.

F1. PÉLDA • Az órabér egy bizonyos életkorig állandó, aztán lineárisan csökken, majd hirtelen 0-vá válik. A ξ_a szabadidő-paraméter állandó. Numerikusan: $Q = 20$, $R_{\mathrm{m}} = 60$, $R_{\mathrm{M}} = 70$, $D = 80$, $\xi_a \equiv 2{,}5$ és

$$w_a = \begin{cases} 1, & \text{ha } a < R_\mathrm{m}, \\ 1 - \delta_v(a - R_\mathrm{m}), & \text{ha } R_\mathrm{m} \le R \le R_\mathrm{M}, \\ 0, & \text{ha } a > R_\mathrm{M}, \end{cases}$$

ahol $0 \le \delta_v < 1/(R_\mathrm{M} - R_\mathrm{m}) = 0{,}1$.
Legyen $\delta_v = 0{,}05$.
Egyszerű számolással:

$$c(R) = \frac{(R-Q) - \delta_v e(R,\, R_\mathrm{m})}{(R-Q)\xi + T}, \quad \text{ahol} \quad e(R,\, R_\mathrm{m}) = \frac{(R - R_\mathrm{m})(R - R_\mathrm{m} + 1)}{2}.$$

Ha $\delta_v = 0$, azaz egészen R_M-ig az órabér állandó, akkor az (*F*3) feltevés teljesül. Ellenben a maximális δ_v-re, ahol $\delta_v = 1/(R_\mathrm{M} - R_\mathrm{m})$, kisebb R-t kell választanunk, de R_m megfelel, hiszen $T > 0$ miatt teljesül:

$$c(R_\mathrm{m}) = \frac{R_\mathrm{m} - Q}{(R_\mathrm{m} - Q)\xi + T} < \frac{1}{\xi}.$$

Ha $R = R_\mathrm{M}$-mel indítunk, akkor a formális munkakínálat már 66 éves korban negatívvá válna, ezért módosítanunk kell R-t. Például válasszuk R-nek azt a legkisebb természetes számot, ahol az eredeti rendszerben (*F*5*a*)-ban $l_R^* < 0$ bekövetkezik; reméljük, hogy ezzel már célhoz érünk. Valóban, a 2. lépésben $R = 67$-re a végig nem negatív munkakínálatú *F1. táblázatot* kapjuk.

F1. táblázat
Optimális pálya az életkor függvényében

Év a	Órabér w_a	Munkakínálat l_a^*	Megtakarítás s_a^*
20	1,00	0,358	0,101
…	…	…	…
59	1,00	0,358	0,101
60	0,95	0,324	0,051
61	0,90	0,286	0,001
62	0,85	0,244	–0,049
63	0,80	0,197	–0,099
64	0,75	0,144	–0,149
65	0,70	0,082	–0,199
66	0,65	0,012	–0,249
67	–	–	–0,257
…	…	…	…
79	–	–	–0,257

Az állandó fogyasztás: $c^* = 0{,}257$, amelyhez az öregedés előtt $s_a^* = 0{,}101$ értékű megtakarítás tartozik. Ha ezt a $w_Q l_Q^* = 0{,}358$ fiatalkori bruttó keresettel hasonlítjuk össze, akkor meglehetősen nagy, 0,28 körüli megtakarítási hányadot kapunk. Az *F1. táblázatban* a 20–59 és a 70–79 időszak állandó pályájából csak a kezdetet és a véget tüntettük fel.

Járadékszámítás mechanizmustervezéssel

Ezt a kérdéskört túlzott nehézsége miatt tettük függelékbe, a részletek *Eső–Simonovits* [2003]-ban és a további tanulmányokban találhatók. Itt is csak körvonalazzuk a megoldást. Visszatérünk a Heterogén élettartam című ponthoz, ahol a népesség két típusból áll: L és H, rendre D_L és D_H ($> D_L$) várható élettartammal, R_L és R_H nyugdíjba vonulási korral, f_L és f_H részaránnyal és egységes keresettel. Feltesszük, hogy $R_H < D_L$, azaz L halála nem ad időben információt a kormányzatnak. A kormányzat a (b_L, R_L) és a (b_H, R_H) menüt kínálja a dolgozóknak, ezek átlagban egyensúlyban vannak, azaz a típusfüggő életpálya-egyenlegek:

$$z_i = \tau(R_i - Q) - (D_i - R_i)b_i, \quad i = L, H, \tag{F9}$$

és átlaguk nulla:

$$\bar{z} = \sum_{i=L}^{H} f_i\left[\tau\left(R_i - Q\right) - \left(D_i - R_i\right)b_i\right] = 0. \tag{F10}$$

Egyelőre nemparametrikus életpálya-hasznosságfüggvényt vizsgálunk:

$$W_i(b_i, R_i) = (R_i - Q)u_Q(v) + (D_i - R_i)u_D(b_i), \quad i = L, H, \tag{F11}$$

ahol $u_Q(\cdot)$ és $u_D(\cdot)$ rendre a dolgozói és nyugdíjaskori éves hasznosságfüggvény, növekvő és sima.

A *társadalmi jóléti függvény* progresszív utilitarista:

$$W\left(b_L, R_L, b_H, R_H\right) = \sum_{i=L}^{H} f_i \psi\left[W_i\left(b_i, R_i\right)\right], \tag{F12}$$

ahol $\psi(\cdot)$ egy szigorúan növekvő és szigorúan konkáv skalár–skalár függvény. Ez azt jelenti, hogy minél nagyobb az egyéni életpálya-hasznosság értéke, annál kisebb mértékben járul hozzá a társadalmi jólléthez. Ellentétben az 5. TÉTEL környékével, itt elkerülhetetlen a két típus életpálya-hasznosságának összemérése.

Két lépésben oldjuk meg a feladatot: az 1. legjobb és a 2. legjobb megoldást keressük.

AZ 1. LEGJOBB MEGOLDÁS • Feltesszük, hogy a kormányzat ismeri, hogy melyik dolgozó milyen típusú, s ezért mindkét típus csak a saját menüjét választhatja. Az 1. legjobb megoldás definíció szerint maximalizálja a W társadalmi jóléti függvényt, miközben kielégíti az (F10) mérlegfeltételt. Ekkor igaz az F2. TÉTEL.

F2. TÉTEL • *Az 1. legjobb megoldás kielégíti a következő feltételeket:*

$$b_L^* = b_H^* = b^* = 1 - \tau, \qquad u_Q(v) - u_D(b^*) + u_D'(b^*)(\tau + b^*) = 0, \tag{F13}$$

$$R_L^* = R_H^* = R^* = \frac{b^*\bar{D} + Q}{1 + b^*}. \tag{F14}$$

Megjegyés • Némileg furcsa, hogy egy rugalmas nyugdíjrendszerben mindkét típusnak ugyanakkor kell nyugdíjba vonulnia, de ez részben a modell elfajultságából következik (vö. *Simonovits–Tóth* [2007]).

A 2. legjobb megoldás • Ebben a szakaszban feltesszük, hogy a kormányzat nem tudja előre, hogy egy dolgozó *L* vagy *H* típusú. Ha az *L* típus a *H* menüt választja, vagy a *H* típus az *L* menüt, akkor a hamisított életpálya-hasznosságuk rendre

$$V_{L|H} = (R_H - Q)u_Q(v) + (D_L - R_H)u_D(b_H), \tag{F15}$$

illetve

$$V_{H|L} = (R_L - Q)u_Q(v) + (D_H - R_L)u_D(b_L). \tag{F16}$$

A kormányzat olyan (b_L, R_L) és (b_H, R_H) menüt kínál a dolgozóknak, hogy az *L* típusnak érdemes legyen az *L* menüt választania, a *H* típusnak pedig a *H* menüt. Képletben a két érdekeltségi feltétel:

$$V_{L|H} \le V_L \qquad \text{és} \qquad V_{H|L} \le V_H. \tag{F17}$$

A 2. legjobb megoldás definíció szerint maximalizálja a *W* társadalmi jóléti függvényt, miközben kielégíti az (*F*10) mérlegfeltételt és az (*F*15)–(*F*16) érdekeltségi feltételt.

F3. tétel • a) *A 2. legjobb megoldásban a H típus nyugdíja az első legjobb (közös) optimum, az L típusé kisebb:*

$$0 < \hat{b}_L < \hat{b}_H = b^*.$$

b) *Az L típus hamarabb nyugdíjba megy, mint a H típus*:

$$0 < \hat{R}_L < \hat{R}_H, \qquad \text{ahol} \qquad V_{H|L} = V_H.$$

Megjegyzés • A rövidebb élettartamúak optimális döntését az (*F*17) bal oldali egyenlőtlenség élessé válása adja: a hosszabb várható értékűeknek közömbös, hogy úgy tesznek, mintha rövidebb várható élettartamúak lennének vagy nem.

Végül megismételjük a numerikus optimalizálást, de a korábbi logaritmikus helyett CRRA-hasznosságfüggvényt feltételezve, nyugdíjas hasznosságfüggvény: $u_D(b) = b^\sigma/\sigma + \omega$, ahol $-\infty < \sigma < 1$, a rugalmasság és a dolgozói hasznosságfüggvény: $u_Q(x) = u_D(x) - \chi$. Legyen $\sigma = -0{,}5$; $\chi = 1{,}4$; $\omega = 4{,}1$ (vö. *Eső–Simonovits* [2003]). A *Simonovits* [2004*b*] cikk 1. táblázatát bemásoljuk, csak most a felnőttévek helyett teljes években számolunk.

F2. táblázat
Nyugdíjszabályok összehasonlítása – eltérő élettartamok

Szabály	Nyugdíjba vonulási kor		Járadék		Életpálya-egyenleg	
	korai	kései	korai	kései	korai	kései
	R_L	R_H	b_L	b_H	z_L	z_H
Autark	60,0	68,0	0,80	0,80	0,0	0,0
Hagyományos	60,0	68,0	0,53	1,37	2,7	–6,9
Kiigazított	60,0	68,0	0,43	1,10	3,7	–3,9
Újraelosztó 1. legjobb	57,3	70,7	0,80	0,80	–2,7	2,7
Újraelosztó 2. legjobb	61,0	65,3	0,61	0,80	2,7	–2,7

Megjegyzés: $D_L = 70$, $D_H = 80$, $f_L = f_H = 0{,}5$, $\tau = 0{,}2$ és $\bar{\tau} = \zeta\tau = 0{,}16$ (kerekítési hibákkal).

Simonovits–Tóth [2007] észrevette, hogy n típusú népesség és hagyományos hasznosságfüggvény esetén a megoldások szabadságfoka $n - 2$, azaz már $n > 2$ esetén határozatlan az optimális megoldás. Ezen többféleképp lehet segíteni, például a társadalmi jóléti függvénybe becsempészni az újraelosztás büntetését.