KÖZGAZDASÁGI SZEMLE, LXI. ÉVF., 2014. JÚNIUS (672–692. o.)

SIMONOVITS ANDRÁS

Gyermektámogatás, nyugdíj és endogén/heterogén termékenység – egy modell

Groezen–Leers–Meijdam [2003] cikkéből kiindulva a lehető legegyszerűbben modellezzük a következő problémát: a kormányzat gyermektámogatási és nyugdíjrendszert működtetve serkenti a dolgozókat gyermekszülésre, és nyugdíjjal pótolja a „rövidlátó" dolgozók elégtelen megtakarítását. Bevezetjük a dolgozók hitelkorlátját, és kiterjesztjük a szerzőhármas elemzését heterogén nevelési költségekre és gyermektámogatásokra. Két fő eredményünk: _1._ a transzferrendszer növelésekor át kell ugrani azt a szakadékot, amely a jólét kezdeti csökkenése miatt keletkezik; _2._ bár a termékenységfüggő nyugdíjak bevezetése növeli az átlagos termékenységet, de csökkenti a társadalmi jólétet, és erősítheti a termékenység heterogenitását.*
Journal of Economic Literature (JEL) kód: D10, H55, J13, J14, J18, J26.

A népességöregedés világszerte nagy kihívást jelent a 21. század nyugdíjrendszereinek működtetésében. A jelenség egyik oka a teljes termékenységi arány csökkenése, a másik a nyugdíjazáskor várható élettartam meredek emelkedése. A nyugdíjkorhatár várható élettartamhoz való kötése nyilvánvaló válasz a második ok ellensúlyozására. Az első ok kezelése azonban más eszközt igényel, nevezetesen a termékenység emelését. Stabil népesség és stabil gazdaság esetén egyszerű összefüggés áll a társadalombiztosítási nyugdíjrendszer és a demográfia között: a társadalombiztosítási rendszerek belső hozamtényezője a népesség- és a termelékenységnövekedési tényező szorzata. Öregedő népesség esetén az összefüggés bonyolultabb, de még súlyosabb a következmény. A belső hozamtényező és a gyermekszám közötti kapcsolat miatt a tb-nyugdíjrendszerben negatív externália lép fel: azok a nyugdíjasok is élvezhetik az átlagtermékenység áldásait, akik átlag alatt teljesítenek a gyermekvállalásban. Számos empirikus tanulmány (vö. *Cigno* [1992] és *Gábos–Gál–Kézdi* [2005]) állítja, hogy minél bőkezűbb a nyugdíjrendszer (másképpen kifejezve: nagyobb a helyettesítési arány, azaz a nyugdíj/nettó kereset hányados), annál kisebb a termékenység. Ebből sokaknak logikusan követke-

* Köszönettel tartozom *Gál Róbert Ivánnak,* hogy folyamatosan sarkallt e téma modellezésére. Hálával tartozom *Cseres-Gergely Zsombornak, Hans Fehrnek, Volker Meiernek, Vincze Jánosnak* és a névtelen lektornak értékes megjegyzéseikért. A kutatást az OTKA K 81483. sz. pályázata támogatta.

Simonovits András, MTA KRTK Közgazdaság-tudományi Intézet, BME és CEU (e-mail: simonovits.andras@krtk.mta.hu).

zik a gyermekek után járó pótlék (általánosabban: gyermektámogatás) és különösen a termékenységtől függő nyugdíj bevezetése (vö. *Kovács Erzsébet szerk.* [2012]).

Sokan sokféleképpen elemezték e gazdag kérdéskört. A modern közgazdaságtan gyakorlatát követve ebben a cikkben csupán egy viszonylag egyszerű matematikai modellcsaládot vizsgálunk, és csak a közvetlenül *előzményként* idekapcsolódó tanulmányok gondolatmenetét tekintjük át nagyvonalúan. Néhányan – kezdve *Leibenstein* [1957] és *Becker* [1960] – egyszerűen beillesztették a gyermekszámot a hasznosságfüggvénybe anélkül, hogy foglalkoztak volna az időskorral (*Eckstein–Wolpin* [1985]).

Ezzel szemben *Groezen–Leers–Meijdam* [2003] az együttélő nemzedékek olyan modelljét állította fel, amelyben a kormányzat nemcsak nyugdíjjárulékot vet ki a fiatalokra, hogy nyugdíjat fizethessen az időseknek, hanem az externáliát csökkentendő, a munkajövedelmeket terhelő adókból a termékenységgel arányos gyermektámogatást fizet: e két tétel a transzferrendszer *sziámi ikrei*. E modellben a nyugdíjba vonulásuk után az idősek a magánmegtakarításaikkal egészítik ki nyugdíjukat. Kis, nyitott országot mérlegelve, a kamatlábat adottnak véve, a szerzők felteszik, hogy a magánmegtakarítások hatékonyabbak, mint a felosztó-kirovó nyugdíj. (Zárt gazdaságot modellezett *Groezen–Meijdam* [2008].) A felnőttek termékenységük és megtakarításaik szintjét megválasztva maximalizálják leszámítolt életpályájuk hasznosságfüggvényét, amely három hasznosságtagból áll: a fiatalkori fogyasztáséból, az időskori fogyasztáséból és a termékenységük miatt érzett hasznosságból.

Felhívjuk figyelmet, hogy a homogén népességet feltételező alapmodellünkben könnyen összemosódik a mikro- és a makroszféra. Például amikor a férfi/nő reprezentatív dolgozó saját termékenységéről dönt, akkor az egész társadalom (átlagos) gyermekszámát is meghatározza.

Groezen–Leers–Meijdam [2003] itt körvonalazott egyensúlyi modellje (továbbiakban: GLM-modell, 3. szakasz) csak segédeszközként szolgált, hogy megfelelő, nemzedékről nemzedékre változó gyermek- és időskori támogatás bevezetésével elérjék azt a nagyon hosszú távon társadalmilag optimális pályát, amely az időben változatlan paraméterű gazdasági rendszerhez tartozik. A szerzőhármas alaptétele szerint, ha a társadalmi leszámítolási tényező kisebb, egyenlő vagy nagyobb, mint a kritikus érték, akkor az optimális transzferek negatívak, nullák vagy pozitívak. Ez a végtelen hosszú lánc sokak számára nemcsak bonyolult, de mesterkélt is: tudjuk, hogy csak a legutolsó négy-öt emberöltő miatt mennyi minden változott a transzferrendszerekben. (A kitekintéshez hivatkozunk *Rangel* [2003] magas követelményeknek megfelelni kívánó tanulmányára, amely a játékelmélet eszközeit alkalmazta a nemzedékek közti előre- és hátramutató transzferek modellezésére.)

Ezért a GLM-modell követői közül csak olyan szerzőket emelünk ki, akik eleve csak az egyensúlyi részre korlátozták figyelmüket. Például *Fenge–Meier* [2005] és [2009] megmutatta, hogy a keresetarányos nyugdíjak esetén a családtámogatás és a termékenységgel arányos nyugdíjrendszer egyenértékű, de alapnyugdíjak esetén az előbbi rosszabb, mint az utóbbi. (Figyeljük meg a termékenység- és keresetarányos nyugdíjak „különleges” jelentését homogén termékenység és kereset esetén!)

Hasonló modellel dolgozott (csak logaritmikus helyett tetszőleges hasznosságfüggvényt alkalmazott) *Cremer–Gahvari–Pestieau* [2008]. A szerzőhármas azt a kérdéskört elemezte, amelyben a kormányzatnak nincs információja a nevelési költségekről. Korábbi cikkükben (*Cremer–Gahvari–Pestieau* [2006]) a mechanizmustervezés módszerével elemezte a morális kockázatot (amikor a szülők nem képesek teljesen szabályozni termékenységüket) és a kontraszelekciót (amikor a kisebb költségű potyautas úgy tesz, mintha nagyobb költségű lenne). Azt találták, hogy „a morális kockázatot kizárva, a termékenység és a nyugdíjak közti pozitív kapcsolat sokkal kevésbé indokolt, mint korábban gondolták" (*Cremer–Gahvari–Pestieau* [2008] 962. o.).

Tanulmányunk *Cremer–Gahvari–Pestieau* [2008] négy modelljét vizsgálja, amelyek előzetes ismerete – szándékunk szerint – nem szükséges a megértéshez, de nem árt áttekintenünk őket. Az összehasonlíthatóság kedvéért elvonatkoztatunk a termelékenység növekedésétől, és azonos hosszúságúnak vesszük az idős és a fiatal kort – ezért a nyugdíj a járulék és a termékenység szorzata. GLM-modellt követve, azonosnak vesszük a gyermekneveléssel és a munkával töltött időszak hosszát is, ekkor az adókulcs az egy gyermekre jutó támogatás és a termékenység szorzata. A modern gazdaság gyakorlatához híven kizárjuk a negatív gyermektámogatást és a negatív nyugdíjat. Növelve a GLM-modellcsalád realizmusát, bevezetjük a hitelkorlátot, amely kizárja a negatív megtakarításokat. A hitelkorlátot *lazának* nevezzük, ha a megtakarítási szándék pozitív vagy 0, és *feszesnek*, ha negatív, de az utóbbi esetben a megtakarítás nulla.

Az 1. modellben „az egyének atomisztikusan cselekednek, és nem veszik figyelembe a költségvetési korlátot, amikor a felnevelendő gyermekek számáról döntenek" (*Groezen–Leers–Meijdam* [2003] 240. o.). Ebben a modellben az optimális termékenység az adókulcs növekvő és – kivéve a magas adó- és alacsony járulékkulcsok esetét – a járulékkulcs csökkenő függvénye. Bevezetve egy paternalista társadalmi jóléti függvényt (vö. *Feldstein* [1985]), amely az egyénnel szemben az időskori fogyasztás hasznosságát nem számítolja le, a társadalmilag optimális járulék- és adókulcs kiszámolható – legalábbis a feszes rendszerben. Modellünk speciális szerkezete miatt e két optimális kulcs azonos. Csak sejtjük, hogy a laza rendszerben az optimális transzferrendszer a transzfer nélküli rendszer. Modellünk egy meglepő eredménye, hogy *a transzferkulcsok emelésekor a jólét a laza tartományban csökken, csak a feszes tartományba érve nő; és külön ki kell kötnünk, hogy „a keletkező jóléti szakadék átugorható"*. Ha nem zártuk volna ki a megtakarítás negativitását, akkor leragadtunk volna a transzfer nélküli rendszer optimalitásánál!

Közgazdaságilag érdekesebb a termékenységtől függő gyermektámogatás és a nyugdíj kölcsönhatása, ha *heterogén* típusokat modellezünk. Az egyszerűség kedvéért csak két típust feltételezünk: az *1. típusnak* nagyobb az egy gyermekre jutó nevelési költsége, és kisebb a belőle származó hasznossága, mint a *2. típusnak*. Feltesszük, hogy a nyugdíj két séma konvex kombinációja: a közös (átlagos) és az egyéni járadéké, ahol az utóbbi arányos a típusfüggő termékenységgel. A laza–feszes vagy feszes–laza vegyes hitelkorlátpárost elhagyjuk (bár erős termékenységi különbségek és differenciált nyugdíjak esetén a kevés gyermekeseknek muszáj megtakarítaniuk). Sőt a két típusra a laza–laza párt is éppen csak érintjük. Igazából csak a legegyszerűbb párra figyelünk, amikor mindkét típusra feszes hitelkorlát érvényes (feszes–feszes hitelkorlátpáros). Látni fogjuk, hogy az egyensúlyi termékenységek eleget tesznek várakozásainknak:

a 2. típusnak nagyobb a termékenysége, mint az 1. típusnak. (*Simonovits* [2014]) csak a termékenységi blokkra összpontosít, és így igazolja, hogy azonos relatív gyermekhasznosság és növekvő nevelési költségkülönbség esetén a nagyobb költségű típus egyre nagyobb nettó transzfert ad a másiknak.)

Heterogén népességnél három további modellt vizsgálunk, de a jóléti vizsgálatokban már számpéldákra kell szorítkoznunk. A 2. modellben továbbra is azonosak a nyugdíjak, és a bonyodalmat csak az egyensúlyi gyermektámogatás meghatározása jelenti. A 3. modellben a nyugdíjak egy része vagy akár egésze arányos a típus termékenységével, de ezt optimális termékenységük kiszámításakor a dolgozók még nem veszik figyelembe, ez *egyértelműen csökkenti a társadalmi jólétet.* A 4. modellben a dolgozók már a nyugdíjak ösztönzési oldalát is figyelembe veszik. Ha a két típus nyugdíja teljesen el van választva (talán ez a legegyszerűbb és legérdekesebb eset), akkor a 4. modell a 3. modellre vezethető vissza, és *a gyermekszámfüggő nyugdíj bevezetésével a társadalmi jólét növekszik a 3. modellhez képest, de nem éri el a 2. modell jólétét. Emellett olyan – modellcsaládunkban elhanyagolt – feszültség keletkezhet az alacsony és a magas termékenységűek között, amely megakadályozhatja a rendszer bevezetését.*

A nagyságrendek érzékeltetése kedvéért az egyes elméleti eredmények bemutatása után ismertetünk néhány szemléltető numerikus számítást. A fent említett két egyszerűsítés (elvonatkoztatunk a termelékenység növekedésétől, és azonos hosszúságúnak vesszük az idős- és a fiatalkort) eleve kizárja a modellek reálisabb kalibrálását. A rossz kalibrálás ellenére hasznosnak tartjuk ezeket a számításokat, ugyanis egyfajta ellenőrzésként szolgálnak: a modellek értelmesek. Emellett ezek a számok kézzelfoghatóbbá teszik az analitikus eredményeket. A gyakorlat számára nem az az érdekes, hogy egy mennyiség a másiknak csökkenő függvénye, hanem hogy gyengén vagy erősen csökkenő függvénye.

Előzetesen csak a heterogén népességre vonatkozó numerikus eredményeket emeljük ki.

1. A közös transzferkulcsot 0,2-ről 0,28-ra (a társadalmi optimumig) emeljük, az alacsonyabb termékenység 0,7-ről 0,65-ra esik, miközben a magasabb termékenység 1,53-ról 1,83-ra emelkedik.

2. Vegyük vízmértékül a 2. modell termékenységtől független nyugdíjrendszerének maximális jólétét. Ehhez képest a teljes arányosság bevezetése mintegy 6 százalékkal csökkenti a jólétet, ha a dolgozók nem reagálnak e szabályra (3. modell), és 2 százalékkal, ha reagálnak (4. modell).

Felhívjuk a figyelmet a modelljeinkben alkalmazott néhány fontos megszorításra.

a) A társadalmi normák szerepét teljesen elhanyagoltuk (nyilvánvaló, hogy a gyermekszámról döntve, a jövendőbeli szülőket sokkal jobban befolyásolja a társadalmi környezet, mint például egy autó megvásárlásakor – *Lindbeck–Nyberg–Weibull* [1999]).

b) Elsiklottunk a kereseti különbségek fölött (azonos gyermektámogatás a nagyobb keresetűektől az alacsonyabb keresetűekhez juttat pénzt, míg a családi adókedvezmény fordítva).

c) Arányos adók és járadékok szerepelnek (néhány országban a gyermektámogatás és különösen a családi adókedvezmény erősen nemlineáris, például 2011-től kezdve

Magyarországon a gyermekenkénti maximális családi adókedvezmény a harmadik gyermeknél megháromszorozódik).

d) A válás, halálozás stb. miatti változó családszerkezettől eltekintettünk (a gyermeknevelés költsége erősen függ a családi szerkezettől).

e) A hozzátartozói járadékokat kirekesztettük (a hozzátartozói nyugdíj erős családbarát eszköz, egyes javaslatok megszüntetnék őket).

A cikk első felében a homogén termékenység transzferekre gyakorolt hatását vizsgáljuk, a második felében a heterogén termékenységet elemezzük. Zárásul következtetéseket vonunk le, a *Függelékben* a nehezebb levezetéseket mutatjuk be.

Homogén termékenység

Röviden összefoglaljuk és továbbfejlesztjük GLM-modell egyensúlyi részét, amely a szokásos együttélő nemzedékek modelljén alapul. Feltételezzük, hogy a termékenység homogén, és az atomizált dolgozók nem látják át, hogy az általuk befizetett járulékok és adók összességében nem függetlenek termékenységi döntésüktől.

Elemzési keret

Megtartjuk GLM-modell jelöléseit, kivéve, hogy a fiatalkori és időskori fogyasztást jelölő c^y-t és c°-t egyszerűbben c-vel, illetve e-vel helyettesítjük, továbbá az $1 + r$ kamattényező helyett R áll. További feltevéseket veszünk át: az adó és járulék mértéke nem hat a munkakínálatra, amely egységnyi. Kis, nyitott gazdaságban a külvilág kamatlába határozza meg a hazai kamatlábat.

Teljes bér: $w = 1$, nyugdíjjárulék(kulcs): τ, adó(kulcs): θ, megtakarítás: s. Egy gyermek nevelési költsége: p, egy gyermekre jutó családtámogatás: φ, termékenység, azaz az egy szülőre jutó gyermekek száma: n, tb-nyugdíj: η, mindegyik nemnegatív valós szám. Újabb egyszerűsítés: a gyermekszám tetszőleges pozitív valós szám.

Fiatalkori és időskori fogyasztás:

$$c + (p - \varphi)n = 1 - \tau - \theta - s \quad \text{és} \quad e = Rs + \eta. \tag{1}$$

Az életpálya-hasznosság függvénye additív és logaritmikus:

$$U(c, n, e) = \log c + \gamma \log n + \beta \log e, \tag{2}$$

ahol γ a relatív gyermekhasznossági együttható, β a leszámítolási tényező: $\gamma > 0$ és $0 \le \beta \le 1$.

Bevezetve a $\hat{\tau} = 1 - \tau$ félnettó bért, és behelyettesítve (1)-et a (2)-be, adódik a származtatott hasznosságfüggvény:

$$u(s, n) = \log[\hat{\tau} - \theta - s - (p - \varphi)n] + \gamma \log n + \beta \log(Rs + \eta). \tag{2*}$$

Feltesszük, hogy kis nyitott gazdaságunk állandósult állapotában az *egy dolgozóra jutó* tőke k, a termelés $f(k) = 1$ és a külső adósság d. Ekkor teljesül

$$(1 - n^{-1})k = 1 - c - n^{-1}e - pn + s + (n - R)d, \quad \text{ahol } k > 0.$$

Legyen $c(\tau, \theta)$, $n(\tau, \theta)$ és $e(\tau, \theta)$ a transzferrendszertől függő egyéni optimumhármas. *Feldstein* [1985] ötletét módosítva, a *paternalista* társadalmi jóléti függvényt úgy definiáljuk, hogy a szubjektív β leszámítolási tényezőt 1-gyel helyettesítjük az életpálya-hasznosság (1) függvényében:

$$V(\tau, \theta) = \log c(\tau, \theta) + \gamma \log n(\tau, \theta) + \log e(\tau, \theta).$$

Már korábban is jeleztük, hogy alapmodellünkben a dolgozók elhanyagolják, hogy miként hatnak termékenységi döntéseik a transzferegyenlegekre. De pótoljuk a GLM-modell hiányát, és mostantól kezdve kizárjuk, hogy a megtakarítás negatív legyen, s ennek megfelelően két esetet különböztetünk meg: a hitelkorlát *laza* ($s > 0$) vagy *szoros* ($s = 0$).

Ehhez szükségünk lesz a $\theta(\tau)$ *elválasztó görbére*, amely a (τ, θ) paramétersíkban a két tartományt elválasztja egymástól.

1. SEGÉDTÉTEL
a) A $\theta(\tau)$ *elválasztó görbe a következő:*

$$\theta(\tau) = \frac{\left[\beta p - \gamma R^{-1}\tau\right]\hat{\tau}}{\beta p + R^{-1}\tau}, \quad \text{ahol} \quad 0 \le \tau < \gamma^{-1}\beta pR.$$

b) Az elválasztó görbe $\theta(0) = 1$*-nél kezdődik és* $\theta(\tau_M) = 0$*-ben végződik, ahol* $\tau_M = \gamma^{-1}\beta pR$*, valamint* $\theta(\tau)$ *csökken a* $[0, \tau_M]$ *szakaszon.*

c) Ha $0 \le \tau < \tau_M$ és $0 < \theta < \theta(\tau)$*, akkor* $s(\tau, \theta) > 0$: *lent laza.*

d) Ha $0 \le \tau \le \tau_M$ *és* $\theta(\tau) \le \theta \le 1 - \tau$*, akkor* $s(\tau, \theta) = 0$: *fent feszes.*

e) Ha $\tau_M < \tau \le 1 - \theta$*, akkor* $s(\tau, \theta) = 0$: *feszes.*

Laza hitelkorlát (S)

A vizsgálatot a laza hitelkorlát elemzésével folytatjuk. Az egyéni optimum kiszámításához vegyük a (2*)-beli redukált hasznosságfüggvény s és n szerinti parciális deriváltjait, és tegyük nullává őket:

$$0 = u_s'(s, n) = \frac{-1}{\hat{\tau} - \theta - s - (p - \varphi)n} + \frac{\beta R}{Rs + \eta} \tag{3a}$$

és

$$0 = u_n'(s, n) = \frac{-(p - \varphi)}{\hat{\tau} - \theta - s - (p - \varphi)n} + \frac{\gamma}{n}. \tag{3b}$$

Egyelőre nem zárjuk ki a negatív megtakarítást. Ekkor a feltételes optimum

$$c(\tau,\theta)=\frac{\hat{\tau}-\theta+R^{-1}\eta}{1+\beta+\gamma},\qquad c(\tau,\theta)=\beta Re(\tau,\theta)\qquad n(\tau,\theta)=\frac{\gamma c(\tau,\theta)}{p-\varphi}. \tag{4}$$

Itt az η nyugdíj és a φ fajlagos gyermektámogatás függ az n termékenységtől, ezért bevezetjük a már említett transzferegyenleteket:

$$\theta=\varphi n \quad \text{és} \tag{5a}$$

$$\eta=\tau n. \tag{5b}$$

Szavakban: *a)* az adó egyenlő az egy gyermekre jutó családtámogatás és a termékenység szorzatával; *b)* a nyugdíjjáradék egyenlő a járulék és a termékenység szorzatával.

Néhány mondatot szólunk e transzferek elkülönítéséről. Követjük azt az általános felfogást, hogy e két rendszert (a családtámogatást és a nyugdíjrendszert) egymástól függetlenül kell kiegyensúlyozni. E nélkül nem is lenne értelme az adók és a járulékok elkülönítésének. Vannak azonban olyan országok, ahol nem ez a helyzet: Dániában például a keresettől független alapnyugdíjat nem járulék, hanem adó fedezi. Magyarországon viszont a nyugdíjjárulék egyre inkább a személyi jövedelemadóban keletkező aránytalanságok javítására szolgál.

Az egy főre jutó φ gyermektámogatás p-ről $p-\varphi$-re csökkenti az egy gyermekre számított magánköltségeket. Ha (5) áll, akkor nincs jövedelemhatás. A τ járulék bevezetése ugyanennyivel csökkenti a fiatalkori fogyasztást, és növeli az időskorit – vö. $\eta=\tau n$ [(5*b*)]. Stacionárius népességben a két változás kiegyenlíti egymást; növekvő/csökkenő népességben viszont a fiatalkori fogyasztás csökkenése kisebb/nagyobb, mint az időskori növekedése. A dinamikus hatékonyság $n>R$ feltételét alkalmazva, az összehasonlítás változik. Ismert, hogy a felosztó-kirovó rendszer bevezetése elvben ilyenkor csökkenti a hosszú távú jólétet stb.

Behelyettesítve az (5) képlet bal és jobb oldali részét az (3*a*)–(3*b*)-be, adódik a végső optimumot kimondó 1. TÉTEL.

1. TÉTEL (vö. *Groezen–Leers–Meijdam* [2003] 241. o.)

a) Ha $(1+\beta+\gamma)p>\gamma R^{-1}\tau$ *és a hitelkorlát laza* [1. SEGÉDTÉTEL *c) része*], *akkor az optimum*

$$c_S^*=\frac{\hat{\tau}-\theta[1-\tau/(pR)]}{1+\beta+\gamma-\gamma/(pR)}, \tag{6a}$$

$$e_S^*=\beta Rc_S^* \tag{6b}$$

$$n_S^*=\frac{\gamma\hat{\tau}+(1+\beta)\theta}{(1+\beta+\gamma)p-\gamma R^{-1}\tau}. \tag{6c}$$

b) Adott τ járulékkulcs mellett az n_S^* optimális termékenység a θ adókulcs növekvő függvénye. Adott θ adókulcs mellett az n_S^* optimális termékenység a τ járulékkulcs csökkenő/növekvő függvénye, ha az adókulcs kisebb/nagyobb, mint a kritikus adókulcs:

$$\theta^\circ=\frac{(1+\beta+\gamma)pR-\gamma}{1+\beta}.$$

MEGJEGYZÉSEK

1. Ha $\theta^\circ < 0$, akkor az első eset (csökkenő termékenység: normál) üres; ha $\theta^\circ > \theta(\tau)$, akkor a második eset (növekvő termékenység: paradoxon) üres. Jelölje τ° a $\theta^\circ = \theta(\tau)$ egyenlet gyökét, és nevezzük *kritikus járulékkulcsnak*, itt a normalitás érvényes $\tau^\circ < \tau < 1$ esetén.

2. A gyermektámogatás mindig kisebb, mint a gyermekre fordított kiadások: $0 \le \varphi < p$. (Ez a feszes tartományban is érvényes.)

Ebben a cikkben nem tudunk teljes képet adni arról, hogyan változik a társadalmi jólét, ha a transzferkulcspáros a laza tartományban változik. Azt azonban képesek vagyunk igazolni, hogyha nem túl nagy γ, akkor a jóléti szempontból nincs szükség transzferre.

2. TÉTEL • *Ha* $\gamma < 2$, *akkor a* $(\tau_S^*, \theta_S^*) = (0, 0)$ *transzfer nélküli rendszer (lokális) maximum.*

MEGJEGYZÉSEK

1. A $\gamma < 2$ feltevés eléggé enyhe. Valóban, a $\tau = 0 = \theta$ esetben az optimális termékenység

$$n_S^* = \frac{\gamma}{(1+\beta+\gamma)p}. \tag{6c°}$$

Ezért például $\gamma = 2$, $p = 1/3$ és $\beta = 1$ esetén a laza tartományban az optimális termékenység túl nagy lenne: $n_S^* = 1{,}5$.

2. Valószínűleg e lokális optimum gyakran globális is a laza tartományban (vö. a *3.* és *4. táblázat*).

Feszes hitelkorlát (T)

Most rátérünk a feszes hitelkorlát elemzésére: $s = 0$. Ekkor az $u_s'(0, n) = 0$ [(3*a*)] feltételt az $u_s'(0, n) < 0$ egyenlőtlenség helyettesíti, és (3*b*) $u_n'(0, n) = 0$-ra egyszerűsödik. Egyszerű számolással ez utóbbi

$$(p - \varphi)n = \gamma c = \gamma[\hat{\tau} - \theta - (p - \varphi)n]. \tag{7}$$

Behelyettesítve a $\theta = \varphi n$ feltételt, és bevezetve a $\bar{\gamma} = 1 + \gamma$ jelölést, adódik a 3. TÉTEL.

3. TÉTEL

a) Ha a hitelkorlát feszes [1. SEGÉDTÉTEL *d) és e) része*], *akkor az optimális termékenység és a megfelelő fiatalkori fogyasztás*

$$n_T^* = \frac{\gamma\hat{\tau} + \theta}{\bar{\gamma} p}, \quad c_T^* = \frac{\hat{\tau} - \theta}{\bar{\gamma}} \quad e_T^* = \tau n_T^*. \tag{8}$$

b) Az optimális termékenység a járulékkulcsnak is és az adókulcsnak is csökkenő függvénye.

c) $0 < \gamma < 1$ *esetén a transzferkulcsok azonos mértékű emelése* $(\Delta\tau = \Delta\theta > 0)$ *esetén a termékenység nő:* $\Delta n_T^* > 0$, $\gamma > 1$ *esetén viszont csökken.*

Nem könnyű szavakba önteni e rideg képletek tartalmát. Aláhúzzuk azonban a $\gamma = 1$ eset vízválasztó jellegét, ekkor az optimális termékenység csak az adó- és a járulékkulcs különbségétől függ:

$$n_T^* = \frac{1-\tau+\theta}{2p}, \quad \text{ha} \quad \gamma = 1. \tag{8'}$$

Továbbá, ha a két transzferkulcs is egyenlő: $\tau = \theta$, akkor értéküktől függetlenül a termékenység a transzfer nélküli maximum fele:

$$n_T^* = \frac{1}{2p}, \quad \text{ha} \quad \gamma = 1 \quad \text{és} \quad \tau = \theta\,. \tag{8''}$$

Figyeljük meg, hogy csak a két tartománybeli optimális termékenységek meghatározása után tudjuk igazolni a korábban kimondott 1. SEGÉDTÉTELT.

A feszes hitelkorlát tartományára szorítkozva, most kiszámítjuk a társadalmilag optimális járulék- és adókulcspárt. Azt előre tudtuk, hogy mindkét optimális transzferkulcs csökkenő függvénye a gyermekhasznossági paraméternek, de az meglepő, hogy egymással egyenlők és más paraméterértékektől függetlenek.

4. TÉTEL • *A feszes hitelkorlát tartományában a társadalmilag optimális járulék- és adókulcs egyenlő, és közös értékük*

$$\tau^* = \theta^* = \frac{1}{3+\gamma}. \tag{9}$$

MEGJEGYZÉSEK

1. Könnyű látni, hogy a (9)-ben megadott kulcspáros valóban feszes hitelkorlátot ad.
2. Egy kezdetlegesebb modellben (*Simonovits* [2014]) beláttuk, hogy a társadalmilag optimális gyermekszám az időskor modellezése nélkül csupán egy paternalista $\gamma^* \neq \gamma$ együttható bevezetésével is elérhető.

A két tartomány jóléti maximumának összehasonlításában a *kritikus* leszámítolási tényező játszik fontos szerepet: a $\beta^\circ = \beta(p, \gamma, R)$ a nevelési költség, a relatív gyermekhasznosság és a kamattényező függvénye. Ezt a

$$V(\beta, 0, 0) = V(\beta, \tau_T^*, \theta_T^*)$$

implicit függvény határozza meg, de bonyolultsága miatt csak numerikusan tudjuk vizsgálni.

Nyilvánvaló, hogy ha $0 < \beta < \beta(p, \gamma, R)$, akkor a feszes optimum jobb, mint a laza; és viszont. Mostantól kezdve erre a fontosabb és érdekesebb esetre összpontosítjuk a figyelmünket.

Ismert, hogy a társadalmi jóléti függvény numerikus értéke önmagában semmitmondó. Értelmes számokhoz akkor jutunk, ha a (τ, θ) páros által adott jólétet egy rögzített, például a transzfermentes (0, 0) pároséval közvetve hasonlítjuk össze. Legyen $\varepsilon > 0$ az előbbi *relatív jóléte* az utóbbihoz képest, ha ε-nal beszorozva a kereseteket, a megnövelt keresetek melletti jólét a transzfermentes rendszerben megegyezik az eredeti keresetek mellett a transzferrendszer adta jóléttel. Képletben:

$$V[\varepsilon, 0, 0] = V[1, \tau, \theta].$$

A (2) hasznosságfüggvény tulajdonságai miatt az optimális termékenység független a bértől, és az optimális fogyasztási páros a bér homogén lineáris függvénye. Emiatt

$$2\log \varepsilon(\tau, \theta) + \log c(0, 0) + \gamma \log n(0, 0) + \log e(0, 0) = \log c(\tau, \theta) + \gamma \log n(\tau, \theta) + \log e(\tau, \theta).$$

Ezért $\log \varepsilon(\tau, \theta)$ vagy $\varepsilon(\tau, \theta)$ egyszerűen kiszámítható:

$$2\log \varepsilon(\tau, \theta) + V[1, 0, 0] = V[1, \tau, \theta], \quad \text{azaz} \quad \varepsilon(\tau, \theta) = \exp[0{,}5(V[1, \tau, \theta] - V[1, 0, 0])].$$

Egyoldalú eszközök

Segíti a megértést, ha tovább elemezzük a két fontos speciális esetet, amikor *a)* vagy nincs gyermektámogatás, *b)* vagy nincs időskori nyugdíj.

a) Nincs gyermektámogatás: $\theta = 0 = \varphi$.

Az 1. SEGÉDTÉTEL szerint az optimális megtakarítás $s > 0$, ha $0 \le \tau < \gamma^{-1}\beta pR$, 0 egyébként. Ekkor az optimális dolgozói fogyasztás és termékenység rendre

– laza hitelkorlát esetén

$$c_S^* = \frac{\hat{\tau}}{1+\beta+\gamma-\gamma/(pR)} \quad \text{és} \quad n_S^* = \frac{\gamma\hat{\tau}}{(1+\beta+\gamma)p-\gamma R^{-1}\tau},$$

– feszes hitelkorlát esetén

$$c_T^* = \frac{\hat{\tau}}{\bar{\gamma}} \quad \text{és} \quad n_T^* = \frac{\gamma\hat{\tau}}{\bar{\gamma}p}.$$

b) Nincs nyugdíj: $\tau = 0$ és $\eta = 0$.

Az 1. SEGÉDTÉTEL szerint $\theta(0) = 1$, azaz $0 \le \theta \le 1$ esetén az optimális megtakarítás pozitív, valamint az optimális dolgozói fogyasztás és termékenység rendre

$$c_S^* = \frac{1-\theta}{1+\beta+\gamma-\gamma/(pR)} \quad \text{és} \quad n_S^* = \frac{\gamma+(1+\beta)\theta}{(1+\beta+\gamma)p}.$$

Figyeljük meg, hogy $(\tau, \theta) = (0, 1)$ adja a legnagyobb termékenységet: $n_S^* = 1/p$.

Numerikus szemléltetések

Ahhoz, hogy fogalmat alkothassunk a nagyságrendekről, minden szakasz végén néhány szemléltető numerikus számítást mutatunk be. Már korábban is említettük, hogy az itt szereplő járulék- és adókulcsok nagyobbak, mint a valóságban, mert nem vettük figyelembe, hogy a gyermekneveléssel és a nyugdíjban töltött idő (mondjuk 20-20 év) jóval rövidebb, mint a munkában töltött idő (mondjuk 40 év).

Az *1. táblázat* rögzített nevelési költség ($p = 0{,}35$) mellett mutatja be a $\beta(\gamma, R)$ kritikus leszámítolási tényező függvényét a kiválasztott rácspontokon. Figyeljük meg, hogy adott relatív gyermekhasznosság esetén minél nagyobb a kamattényező, annál kisebb a kritikus érték! Például $\gamma = 0{,}4$ esetén ahogy a 30 éves kumulált kamattényező 1,1-ről 1,5-re nő, a kritikus β° leszámítolási tényező 0,366-ről 0,218-re csökken. Eközben az állandósult termékenység $n_S^* = 0{,}647$-ről 0,706-re emelkedik, miközben a feszes állapot ($n_T^* = 1{,}176$) változatlan marad. Hasonlóan, rögzítve a kamattényezőt $R = 1{,}3$ értéken (éves szinten a kamatláb 0,88 százalék), a gyermek relatív hasznossága 0,3-ról 0,5-re emelkedik, a kritikus β° 0,229-ről 0,316-ra nő.

1. táblázat
A kritikus leszámítolási tényező függvénye: $\beta^\circ = \beta(\gamma, R)$
($p = 0{,}35$)

Relatív hasznosság együtthatója	30 éves kumulált kamattényező	Kritikus leszámítolási tényező	Laza	Feszes
			termékenység állandósult állapota	
γ	R	β°	n_S^*	n_T^*
0,3	1,1	0,300	0,536	1,126
	1,3	0,229	0,561	
	1,5	0,186	0,577	
0,4	1,1	0,366	0,647	*1,176*
	1,3	*0,272*	*0,684*	
	1,5	0,218	0,706	
0,5	1,1	0,441	0,736	1,224
	1,3	0,316	0,787	
	1,5	0,250	0,816	

1. PÉLDA • Tegyük fel, hogy 30 év telik el az átlagos megtakarítás és felhasználás között (mondjuk 40 és 70 év között), és válasszuk a $\beta = 0{,}2$ leszámítolási tényezőt (éves szinten a diszkontráta 5,2 százalékot). Legyen egy gyermek nevelési költsége egy dolgozó adózás előtti keresetében kifejezve: $p = 0{,}35$; és legyen a relatív gyermekhasznossági együttható $\gamma = 0{,}4$. Ahhoz, hogy egyáltalán szükség legyen egy felosztó-kirovó nyugdíjrendszerre, tegyük fel, hogy $\beta R < 1$. Elegendően alacsony kamattényezőt választunk: $R = 1{,}3$. Ekkor a járulék- és az adókulcs változtatása táblázatosan vizsgálható.

Elsőként az elválasztó görbét szemléltetjük. Értéke 1-től 0-ig csökken, miközben a járulékkulcs 0-ról 0,24-re nő. A kritikus adókulcs $\theta^\circ = 0{,}05$ és a megfelelő járulékkulcs $\tau^\circ = 0{,}2$. Másodszor a 3. TÉTELBŐL $\tau^* = \theta^* = 0{,}294$; s ez közel van a majdani *2.* és *3. táblázatban* szereplő 0,3-hoz.

A való világ közelében maradva, legyen mindkét kulcs legfeljebb 0,4. Az optimális termékenység bemutatásával kezdve, a *2. táblázat* 1. sora (nincs nyugdíj) szerint a termékenység meredeken emelkedik az adókulccsal: 0-nál 0,714; 0,4-nél 1,571. Az első oszlop (nincs gyermektámogatás) a termékenység meredek csökkenését mutatja: 0,714-ról ($\tau = 0$-nál) 0,49-ra ($\tau = 0{,}4$-nél). Hasonló változások figyelhetők meg a többi sorban és oszlopban, bár elegendően alacsony adókulcs esetén (pozitív megtakarítással) a termékenység paradox módon nő a járulékkulccsal, csak ez a durva felbontás miatt itt nem látszik. A maximális termékenység a $(\tau, \theta) = (0, 0{,}4)$ páros körül valósul meg.

2. táblázat
Transzferkulcsok és termékenység
($p = 0{,}35$, $R = 1{,}3$ és $\gamma = 0{,}4$)

Járulékkulcs (τ)	Adókulcs (θ)				
	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,0	0,714	0,929	1,143	1,357	*1,571*
0,1	0,680	0,907	1,134	1,347	1,551
0,2	0,642	0,857	1,061	1,265	1,469
0,3	0,571	0,776	0,980	1,184	1,388
0,4	0,490	0,694	0,898	1,102	1,306

Most bemutatjuk, hogyan függ a transzferrendszer relatív hatékonysága a transzferkulcsoktól. A *3. táblázat* 1. sorában (nincs nyugdíj) az adókulcs emelkedésével csökken a relatív hatékonyság: 1-ről ($\theta = 0$) 0,702-ra ($\theta = 0{,}4$-nél). A *3. táblázat* 1. oszlopában (nincs családtámogatás) ugyanezt látjuk: 1-ről ($\tau = 0$) 0,843-ra csökken ($\tau = 0{,}4$-nél). A többi oszlopban nincs ilyen monotonitás. A 4. sor és a 4. oszlop – $(\tau, \theta) = (0{,}3, 0{,}3)$ – tartalmazza a közelítő maximumot: 1,106. Itt a társadalmi optimum a járulék- és az adókulcs gondos összehangolásából fakad.

3. táblázat
Transzferkulcsok és a relatív hatékonyság
($p = 0{,}35$, $R = 1{,}3$ és $\gamma = 0{,}4$)

Járulékkulcs (τ)	Adókulcs (θ)				
	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,0	1,000	0,948	0,879	0,796	0,702
0,1	0,943	0,912	0,863	0,856	0,862
0,2	0,880	0,953	1,024	1,058	1,050
0,3	0,879	1,007	1,083	*1,106*	1,070
0,4	0,843	0,982	1,052	1,052	0,967

Részletesebb képet kapunk, amikor a *4. táblázatban* megismételjük a számolást a $\tau = \theta$ átló mentén, de nemcsak a termékenységet és a relatív hatékonyságot, hanem a fiatalkori és időskori fogyasztást, valamint bemutatjuk a szubjektív hasznosságot is. Mindenekelőtt vegyük észre, hogy a megtakarítás csak alacsony járulék- és adókulcsok esetén valósul meg, nevezetesen $\tau = \theta = 0{,}15$ alatt. A szubjektív hasznosságfüggvény végig csökken, de a relatív hatékonyság nem, a maximum a [0,25, 0,3] szakaszba esik.

4. táblázat
Az egyenlő transzferkulcsok hatása

Egyenlő transzfer-kulcs	Termé-kenység	Meg-takarítás	Fiatalkori fogyasztás	Időskori fogyasztás	Életpálya-hasznosság-függvény	Relatív hatékonyság
$\tau = \theta$	n^*	s^*	c^*	e^*	U^*	ε
0,00	0,714	0,125	0,625	0,163	–0,968	1,000
0,05	0,808	0,085	0,582	0,151	–1,004	0,954
0,10	0,907	0,039	0,544	0,141	–1,040	0,912
0,15	1,000	0,000	0,500	0,150	–1,073	0,919
0,20	1,061	0,000	0,429	0,212	–1,134	1,024
0,25	1,122	0,000	0,357	0,281	–1,238	1,087
0,30	1,184	0,000	0,286	0,355	–1,392	*1,106*
0,35	1,245	0,000	0,214	0,436	–1,619	1,071
0,40	1,306	0,000	0,143	0,522	–1,969	0,967

Heterogén termékenység

Miután elemeztük a homogén termékenységet, a heterogén termékenység reálisabb és érdekesebb esetét vizsgáljuk meg.

A nyugdíjdifferenciálásnak nincs ösztönzési hatása (2. és 3. modell)

Az optimálisan választott termékenységben úgy kaphatunk heterogenitást, ha legalább két típust tételezünk fel, amelyek különböznek egymástól a gyermeknevelési költségben és a relatív gyermekhasznosságban. A rövidség kedvéért megelégszünk két típussal:

$$p_1 > p_2 > 0 \qquad \text{és} \qquad 0 < \gamma_1 < \gamma_2.$$

[A további kettő vegyes típus: (p_1, γ_2) és (p_2, γ_1) sokkal ritkább, ezért első vizsgálatunkban figyelmen kívül hagyjuk.] Jelölje a két típus súlyát a népességben $f_1, f_2 > 0$, összegük egységnyi: $f_1 + f_2 = 1$. Az átlagtermékenység képlete

$$n = f_1 n_1 + f_2 n_2. \tag{10a}$$

Az aggregált gyermektámogatási egyenlet marad: $\theta = \varphi n$, de a nyugdíjszabályok változnak.

Feltesszük, hogy a típusfüggő nyugdíj a saját termékenység növekvő inhomogén lineáris függvénye. Legyen $\delta \in [0, 1]$ a közös, és $\hat{\delta} = 1 - \delta$ a saját nyugdíj súlya:

$$\eta_i = \delta \tau n + \hat{\delta} \tau n_i, \quad i = 1, 2. \tag{10b}$$

Ha $\delta = 0$, akkor két független nyugdíjrendszerünk van a termékenyebb és a kevésbé termékeny típusra. Ha $\delta = 1$, akkor a fentebb tanulmányozott egységes nyugdíjat kapjuk vissza. Általában feltesszük, hogy $0 < \delta < 1$.

Fogyasztási függvények:

$$c_i = \hat{\tau} - \theta - (p_i - \varphi)n_i - s_i \quad \text{és} \quad e_i = Rs_i + \eta_i. \tag{11}$$

Életpályahasznosság-függvények:

$$U_i(c_i, n_i, e_i) = \log c_i + \gamma_i \log n_i + \beta \log e_i. \tag{12}$$

Behelyettesítve a (11)-et a (12)-be, adódnak a típusfüggő származtatott hasznosság-függvények:

$$u_i(s_i, n_i) = \log[\hat{\tau} - \theta - (p_i - \varphi)n_i - s_i] + \gamma_i \log n_i + \beta \log(Rs_i + \eta_i). \tag{13}$$

Ideiglenesen külön-külön oldjuk meg az egyéni optimalizálási feladatokat.

A laza hitelkorlát esetén az s_i és az n_i szerinti parciális deriváltak adják az optimumokat [vö. (4)]:

$$c_i^* = \frac{\hat{\tau} - \theta + R^{-1}\eta_i}{1 + \beta + \gamma_i} \quad \text{és} \quad n_i^* = \frac{\gamma_i c_i^*}{p_i - \varphi}. \tag{14}$$

Feszes hitelkorlátok esetén visszatérünk (7)-hez:

$$(p_i - \varphi)n_i = \gamma_i c_i = \gamma_i[\hat{\tau} - \theta - (p_i - \varphi)n_i]. \tag{15}$$

A $\bar{\gamma}_i = 1 + \gamma_i$ jelöléssel és (15) átrendezésével

$$\bar{\gamma}_i(p_i - \varphi)n_i = \gamma_i(\hat{\tau} - \theta), \quad i = 1, 2. \tag{16}$$

Vegyük figyelembe, hogy két típus esetén négy hitelkorlát-kombináció van:

$$s_1, s_2 > 0, \quad s_1 > 0 = s_2, \quad s_2 > 0 = s_1 \quad \text{és} \quad s_1 = 0 = s_2.$$

Az egyszerűség kedvéért kihagyjuk a vegyes eseteket és a laza–laza párt, valamint egyelőre eltekintünk a két feltétel közti kapcsolattól. Magától értetődő megfigyelést tehetünk a feszes–feszes kombinációról [vö. (16)].

2. SEGÉDTÉTEL. *Ha mindkét típus hitelkorlátja feszes*: $s_1 = 0 = s_2$, *akkor a hatékonyabb típusnak nagyobb a termékenysége, mint a kevésbé hatékonynak*:

$$p_1 > p_2 > 0 \quad \text{és} \quad 0 < \gamma_1 < \gamma_2 \quad \text{esetén} \quad n_1^* < n_2^*. \tag{17}$$

A 2. SEGÉDTÉTEL miatt a kevésbé hatékonyt egyszerűen kevésbé termékenynek nevezhetjük.

Az optimum meghatározásához ki kell számítanunk a φ egyensúlyi értékét.

5. TÉTEL • *Egy heterogén termékenységű rendszert vizsgálunk, ahol a dolgozók nem veszik figyelembe a nyugdíjrendszer termékenységi komponensét. A feszes–feszes egyensúlyban a gyermekenkénti támogatás* (φ) *a következő másodfokú egyenlet kisebbik gyöke*:

$$A\varphi^2 - B\varphi + C = 0, \tag{18}$$

ahol az együtthatók rendre

$$A = \omega\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2 + f_1\gamma_1\bar{\gamma}_2 + f_2\gamma_2\bar{\gamma}_1, \tag{19a}$$

$$B = \omega\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2(p_1 + p_2) + f_1\gamma_1\bar{\gamma}_2 p_2 + f_2\gamma_2\bar{\gamma}_1 p_1, \tag{19b}$$

$$C = \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2 p_1 p_2, \tag{19c}$$

$$\omega = \frac{\theta}{\hat{\tau} - \theta} \quad \text{és} \quad \bar{\gamma}_i = 1 + \gamma_i, \quad i = 1, 2. \tag{20}$$

Végül definiáljuk a paternalista utilitariánus társadalmi jóléti függvényt, ahol $t = (\tau, \theta)$:

$$V\left(t, \delta\right) = \sum_{i=1}^{2} f_i V_i\left[t, \delta, n_i^*\right], \quad \text{ahol} \quad V_i[t, \delta, n_i^*] = \log c_i^* + \gamma \log\, n_i^* + \log e_i^*. \tag{21}$$

A Jensen-egyenlőtlenség és (10b) triviális következményével folytatjuk.

6. TÉTEL • *Minél erősebb a nyugdíjak differenciálása, azaz minél kisebb δ, annál kisebb a társadalmi jólét. Speciálisan, tetszőleges t transzferpárra, $V(t, 0) < V(t, 1)$.*

2. PÉLDA (2. modell) • Feltesszük, hogy a két típus súlya azonos: $f_1 = f_2 = 0{,}5$; a költség és relatív gyermekhasznosság értékei pedig $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}3$ és $\gamma_1 = 0{,}35$; $\gamma_2 = 0{,}45$. Egyelőre a nyugdíjak egységesek: $\delta = 1$.

Az 5. *táblázat* elemzésében hangsúlyozzuk a homogén esettől való eltérést. Igaz, heterogén számpéldánkban is egyenlők az optimális transzferkulcsok. De a transzferkulcsok azonos növelése (0,2-0,2 fölött) csökkenti az 1. típus termékenységét, bár növeli az átlagos termékenységet. E paradox viselkedés alapvető oka valószínűleg az 1. típustól a 2. típushoz áramló nettó transzfer léte: $f_1(\theta - \varphi n_1) = -f_2(\theta - \varphi n_2) > 0$. A társadalmilag optimális (paternalista) adó és járulékkulcs 0,3 közelében marad, de az 1. típusnál előbb, a 2. típusnál később maximális a paternalista jólét. Mivel heterogén népesség esetében nem foglalkozunk a laza hitelkorláttal, nem ismerjük a transzfer nélküli rendszer jóléti értékét. Ezért a korábbival ellentétben most a maximális jólétet vesszük vízmértéknek (1-nek), és ehhez viszonyítjuk a relatív hatékonyságot.

5. táblázat
Az azonos transzferkulcsok hatása – heterogén típusok, közös nyugdíjak
($p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}3$ és $\gamma_1 = 0{,}35$, $\gamma_2 = 0{,}45$)

Transzferkulcs $\tau = \theta$	Termékenység 1. típus n_1^*	Termékenység 2. típus n_2^*	Paternalista hasznosság 1. típus V_1^*	Paternalista hasznosság 2. típus V_2^*	Relatív hatékonyság ε
0,20	0,703	1,535	−2,431	−2,186	0,923
0,22	0,696	1,602	−2,382	−2,115	0,951
0,24	0,686	1,672	−2,348	−2,056	0,973
0,26	0,672	1,749	−2,329	−2,010	0,989
0,28	0,653	1,831	*−2,326*	−1,977	0,998
0,30	0,630	1,920	−2,339	−1,956	*1,000*
0,32	0,601	2,016	−2,371	*−1,948*	0,994
0,34	0,565	2,121	−2,423	−1,957	0,979
0,36	0,523	2,235	−2,501	−1,983	0,954

6. táblázat
A transzferkulcsok hatása – heterogén típusok, független nyugdíjak
($p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}3$ és $\gamma_1 = 0{,}35$, $\gamma_2 = 0{,}45$)

Transzferkulcs $\tau = \theta$	Termékenység 1. típus	Termékenység 2. típus	Paternalista hasznosság 1. típus	Paternalista hasznosság 2. típus	Relatív hatékonyság
0,20	0,703	1,535	−2,896	−1,870	0,889
0,22	0,696	1,602	*−2,883*	−1,783	0,912
0,24	0,686	1,672	−2,890	−1,707	0,928
0,26	0,672	1,749	−2,918	−1,642	0,936
0,28	0,653	1,831	−2,969	−1,589	*0,937*
0,30	0,630	1,920	−3,045	−1,546	0,929
0,32	0,601	2,016	−3,150	−1,516	0,912
0,34	0,565	2,121	−3,289	−1,500	0,884
0,36	0,523	2,235	−3,471	*−1,500*	0,845

Megjegyzés: a hatékonyságot az *5. táblázat* maximumához viszonyítjuk.

Rátérünk a differenciált nyugdíjak részletesebb tárgyalására: $0 \leq \delta < 1$. Egyelőre kizárjuk az ösztönző hatásokat. Ahhoz, hogy markáns különbségeket kapjunk, a nyugdíjban maximális különbségtevéssel élünk: $\delta = 0$. A *6. táblázatban* bemutatott eredmények lényegében megegyeznek a korábbiakkal: de a differenciálás miatt a kevésbé termékeny típus még kevesebb hasznosságot élvez, a termékenyebb még többet, s emiatt a típusfüggő paternalista optimumok $\tau_1^* = 0{,}22$, illetve $\tau_2^* = 0{,}34$

esetén valósulnak meg, azaz erős a polarizáció. Összességében árt a differenciálás. Az összehasonlíthatóság kedvéért most is az *5. táblázat* maximális jólétéhez viszonyítjuk a jólétet, a relatív maximum 0,937: több mint 6 százalékkal kisebb, mint a differenciálatlan rendszerben.

Mi történik, ha termékenységi döntéseikben a típusok figyelembe veszik a gyermektámogatás és a nyugdíj termékenységfüggését?

Termékenységfüggő nyugdíjak ösztönzéssel (4. modell)

Bevezetve a „másik" játékos játékelméletben használt jelölését, a $-i$ alsó indexet, (3*b*)-hez hasonlóan (7), illetve (15) a következőképpen módosul:

$$u'_{i,n_i}(0, n_i, n_{-i}) = \frac{-(p_i - \varphi)}{\hat{\tau} - \theta - (p_i - \varphi)n_i} + \frac{\gamma_i}{n_i} + \frac{\hat{\delta}\beta}{\delta n + \hat{\delta} n_i} = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{22}$$

Ha $0 < \delta < 1$, akkor két nemlineáris egyenletből álló rendszerünk van, amely talán csak numerikus módszerekkel megoldható. De nem akarunk a Cournot-egyensúly játékelméleti problémájával bajlódni, amelyet a termékenyebb és kevésbé termékeny típus közötti versengés okozna.

Ha teljesen elkülönítjük a két típus nyugdíját: $\delta = 0$, azaz $\hat{\delta} = 1$, ekkor (22) két független egyenletre bomlik:

$$\frac{-(p_i - \varphi)}{\hat{\tau} - \theta - (p_i - \varphi)n_i} + \frac{\gamma_i}{n_i} + \frac{\beta}{n_i} = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{$\widetilde{22}$}$$

Összehasonlítva (22)-t és ($\widetilde{22}$)-t, a kettő között csak az a különbség, hogy a (22)-beli γ_i helyén $\gamma_i + \beta_i$ szerepel a ($\widetilde{22}$)-ben. Ez a megfigyelés bizonyítja a következő tételt.

7. TÉTEL

a) Ha elkülönítjük a két típus nyugdíját: $\delta = 0$, *és bevezetjük az ösztönzési hatásokat, akkor az ösztönzés nélküli rendszer* γ_i *relatív gyermekhasznossági együtthatójához hozzáadódik a* β *leszámítolási tényező:*

$$\tilde{\gamma}_i = \gamma_i + \beta.$$

b) Az ösztönzés aktiválása növeli az átlagos termékenységet, de csökkenti a kisebb termékenységet.

Itt már olyan bonyolult összefüggésekkel állunk szemben, hogy be kell érnünk a számpéldák elemzésével. Megismételjük a számolásokat az új $\tilde{\gamma}$ értékekkel. A *7. táblázat* szerint a társadalmilag optimális járulék- és adókulcs csökken, 0,26-0,26 körüli értéket vesz föl, de a 2. típus hasznossága és a társadalmi jólét javul a differenciált, de ösztönzés nélküli esethez képest, viszont elmarad a kiinduló esethez képest: $0{,}976 > 0{,}937$, de $0{,}976 < 1$.

Összegezve az itt leírtakat: az ösztönzési hatások jelentősek, de nem szabad megfeledkezni alkalmazásuk jól ismert korlátairól:

7. táblázat
A transzferkulcsok hatása – heterogén típusok, teljesen elkülönített nyugdíjak ösztönzéssel ($p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}3$ és $\gamma_1 = 0{,}35$; $\gamma_2 = 0{,}45$)

Transzferkulcs $\tau = \theta$	Termékenység 1. típus	Termékenység 2. típus	Paternalista hasznosság 1. típus	Paternalista hasznosság 2. típus	Relatív hatékonyság
0,20	0,878	1,660	–2,760	−1,785	0,940
0,22	0,867	1,708	*–2,753*	−1,711	0,959
0,24	0,853	1,761	–2,766	−1,648	0,971
0,26	0,835	1,818	–2,799	−1,595	*0,976*
0,28	0,813	1,881	–2,854	−1,552	0,973
0,30	0,785	1,951	–2,933	−1,518	0,962
0,32	0,752	2,029	–3,041	−1,494	0,942
0,34	0,712	2,117	–3,184	*−1,482*	0,912
0,36	0,663	2,215	–3,369	−1,484	0,870

Megjegyzés: a hatékonyságot az *5. táblázat* maximumához viszonyítjuk.

a) a kevésbé termékenyebb típus nem szavazná meg e politikát;

b) még ha meg is szavazná, bevezetése gyengítené a kevésbé termékeny típus munkavállalási és jövedelembevallási érdekeltségét;

c) a gyakorlatban a kevésbé termékenyek támogatják termékenyebb testvéreik gyermekeit: a nagynénik az unokahúgaikat, a nagybácsik az unokaöccseiket;

d) a széles körű válás és az özvegyi nyugdíjak léte tovább bonyolítja a helyzetet.

Következtetések

Újratárgyaltuk GLM-modell sziámi ikreinek, a tb-nyugdíj és a gyermektámogatás egyensúlyi helyzeteit. A tb-nyugdíj azért fontos, mert a fiatalok rövidlátóak, és a nagycsaládok felbomlottak. A gyermektámogatás pedig azért fontos, mert a tb-nyugdíj bevezetésének externális hatásai miatt alááshatja a termékenységet. Hangsúlyoztuk a hitelkorlát modellezésének fontosságát, és a GLM-modellt továbbfejlesztve, megkülönböztettük a laza és a feszes hitelkorlátot. Tanulmányoztuk a homogén és heterogén termékenység szerepét.

E modelltípusok meglepő vonása, hogy a transzferrendszer nélküli esetből kiindulva, a transzferek növekedésekor a társadalmi jólét először csökken, ahogy a kötelező nyugdíjjárulékok kiszorítják a hatékonyabb magánmegtakarításokat. Csak a laza–feszes határon való áthaladás után kezd a társadalmi jólét emelkedni. *A kormányzati transzfereknek át kell ugraniuk a szakadékot, amely a jólét kezdeti csökkenése miatt keletkezik.*

A termékenységi irodalom fontos, de elhanyagolt dimenziója a heterogenitás: vannak alacsony és vannak magas termékenységű családok, amelyeket modellünkben rendre nagy költség–„kis gyermekszeretet" és kis költség–„nagy gyermekszeretet" jellemez. Ebben a helyzetben nem szabad megfeledkeznünk a gyermektámogatáson keresztül megvalósuló újraelosztásról. Egyes országokban (például Németországban vagy Magyarországon) vannak olyan javaslatok, hogy a nyugdíjakat részben a gyermekszámmal tegyék arányossá (vö. *Kovács* [2012]). E tanulmányban képesek voltunk egy ilyen tervet modellezni. Papíron e tervek megvalósítása növeli az átlagos termékenységet. De súlyos ellenérvek szólnak alkalmazásuk ellen. Itt csak kettőt említünk: az ilyen politika megvalósítása *1.* csökkenti a társadalmi jólétet és – kilépve a modell kereteiből – *2.* polarizálhatja a társadalmat a termékenyekre és a terméktelenekre.

Hivatkozások

Becker, G. S. [1960]: An Economic Analysis of Fertility. Megjelent: *Easterline, R.* (szerk.): Demographic and Economic Change in Developed Countries. Princeton University Press, Princeton.

Cigno, A. [1992]: Children and Pension. Journal of Population Economics, Vol. 5. No. 3. 175–183. o.

Cremer, H.–Gahvari, F.–Pestieau, P. [2006]: Pensions with Endogenous and Stochastic Fertility. Journal of Public Economics, 90. No. 12. 2303–2321. o.

Cremer, H.–Gahvari, F.–Pestieau, P. [2008]: Pensions with Heterogeneous Agents and Endogenous Fertility. Journal of Population Economics, Vol. 21. No. 4. 961–981. o.

Eckstein, Z.–Wolpin, K. I. [1985]: Endogenous Fertility and Optimal Population Size. Journal of Public Economics, Vol. 27. No. 1. 93–106. o.

Feldstein, M. S. [1985]: The Optimal Level of Social Benefits. Quarterly Journal of Economics, Vol. 100. No. 2. 302–320. o.

Fenge, R.–Meier, R. [2005]: Pension and Fertility Incentives. Canadian Journal of Economics, Vol. 38. No. 1. 28–48. o.

Fenge, R.–Meier, R. [2009]: Are Family Allowances and Fertility Related Pensions Perfect Substitutes? International Taxation and Public Finance 16, 137–163. o.

Gábos András–Gál Róbert Iván–Kézdi Gábor [2005]: Fertility Effect of the Pension System and Other Intergenerational Transfers: Test on Hungarian Data. Center for Intergenerational Studies, Institute of Economic Research, Hitotsubashi University, Discussion Paper, 259.

Groezen, B. van–Leers, Th.–Meijdam, L. [2003]: Social Security and Endogenous Fertility: Pensions and Child Allowances as Siamese Twins. Journal of Public Economics, Vol. 87. No. 2. 233–251. o.

Groezen, B. van–Meijdam, L. [2008]: Growing Old and Staying Young: Population Policy in an Aging Closed Economy. Journal of Population Economics, Vol. 21. No. 3. 573–588. o.

Kovács Erzsébet (szerk.) [2012]: Nyugdíj és gyermekvállalás. Tanulmánykötet. Gondolat Kiadó, Budapest.

Leibenstein, H. M. [1957]: Economic Backwardness and Economic Growth. New York, Wiley.

Lindbeck, A.–Nyberg, S.–Weibull, J. W. [1999]: Social Norms and the Welfare State. Quarterly Journal of Economics 114, 1–35. o.

Rangel, A. [2003]: Forward and Backward Intergenerational Goods: Why Is Social Security Good for the Environment? American Economic Review, Vol. 93. No. 3. 813–834. o.

Simonovits András [2014]: Optimal Child Allowances with Heterogeneous Fertilitie. MTA KRTK KTI, Working Paper, 1.

Függelék

Az 1.b tétel bizonyítása

Deriválva a (6)-beli $n_S^*(\tau, \theta)$-t τ szerint, és elhagyva az állandó tagokat:

$$\frac{\partial n_S^*(\tau,\theta)}{\partial\tau} \approx \gamma\left[(1+\beta+\gamma)p-\gamma R^{-1}\tau\right]+\left[\gamma\hat{\tau}+\theta(1+\beta)\gamma R^{-1}\right].$$

Egyszerű számolásból következően

$$\frac{\partial n_S^*(\tau,\theta)}{\partial\tau} < 0, \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad \theta < \theta^\circ.$$

A 2. tétel bizonyítása

Ebben a bizonyításban elhagyjuk az S alsó indexet, és a

$$V(\tau, \theta) = \log c(\tau, \theta) + \gamma \log n(\tau, \theta) + \log e(\tau, \theta).$$

társadalmi jóléti függvényt elemezzük. Számítsuk ki parciális deriváltjait:

$$V_\tau'(\tau,\theta) = \frac{c_\tau'(\tau,\theta)}{c(\tau,\theta)} + \gamma\frac{n_\tau'(\tau,\theta)}{n(\tau,\theta)} + \frac{e_\tau'(\tau,\theta)}{e(\tau,\theta)}$$

és

$$V_\theta'(\tau,\theta) = \frac{c_\theta'(\tau,\theta)}{c(\tau,\theta)} + \gamma\frac{n_\theta'(\tau,\theta)}{n(\tau,\theta)} + \frac{e_\theta'(\tau,\theta)}{e(\tau,\theta)}.$$

Felhasználva az $e = \beta Rc$ optimumfeltételt, az 1. és a 3. tag mindkét egyenletben egyenlő. Emellett (6) alapján $\tau = 0 = \theta$ esetén

$$\frac{c_\tau'(0,0)}{c(0,0)} = \frac{\gamma p^{-1}R^{-1} - (\bar{\gamma}+\beta)}{\bar{\gamma}+\beta} < 0, \quad \text{és} \quad \frac{n_\tau'(0,0)}{n(0,0)} = \gamma^{-1}\frac{c_\tau'(0,0)}{c(0,0)}.$$

Ezért

$$V_\tau'(0,0) = 3\frac{c_\tau'(0,0)}{c(0,0)} < 0.$$

A $c(0, 0)$ és $n(0, 0)$ linearitása miatt a rugalmasságok értéke 1 és –1, azaz $V_\theta'(0, 0) =$ $= -2 + \gamma < 0$ stb.

A másodrendű feltételek vizsgálatáról lemondunk.

A 4. tétel bizonyítása

Feszes hitelkorlát esetén a kiindulópontunk (8) következménye:

$$V\{\tau,\theta\} = \log\frac{1-\tau-\theta}{\bar{\gamma}} + \gamma\log\frac{\gamma\hat{\tau}+\theta}{\bar{\gamma}p} + \log\frac{\tau(\gamma\hat{\tau}+\theta)}{\bar{\gamma}p} \to \max.$$

A $\log(x/y) = \log x - \log y$ azonosságot használva, az állandó nevezők elhagyhatók. Ekvivalens függvényünk:

$W\{\tau, \theta\} = \log(1 - \tau - \theta) + \bar{\gamma}\log[\gamma(1 - \tau) + \theta] + \log \tau \to \max.$

Vegyük a W függvény τ és θ szerinti parciális deriváltjait és tegyük őket nullával egyenlővé, ez a maximum szükséges feltétele:

$$0 = W'_\tau = \frac{-1}{1-\tau-\theta} - \frac{\bar{\gamma}\gamma}{\gamma(1-\tau)+\theta} + \frac{1}{\tau} \tag{F1}$$

és

$$0 = W'_\theta = \frac{-1}{1-\tau-\theta} - \frac{\bar{\gamma}}{\gamma(1-\tau)+\theta}. \tag{F2}$$

Az ($F2$) szerint

$$\theta = \frac{1-\tau}{2+\gamma} = \kappa(1-\tau). \tag{F3}$$

Visszahelyettesítve ($F3$)-at ($F1$)-be,

$$\frac{-1}{(1-\kappa)(1-\tau)} - \frac{\bar{\gamma}\gamma}{(\gamma+\kappa)(1-\tau)} + \frac{1}{\tau} = 0.$$

Ezzel a tételt igazoltuk.

A 2. segédtétel bizonyítása

Mikor igaz $n_1^* < n_2^*$? Az igazolandó egyenlőtlenségbe behelyettesítjük a (16)-ot:

$$\frac{\gamma_1(\hat{\tau}-\theta)}{\bar{\gamma}_1(p_1-\varphi)} < \frac{\gamma_2(\hat{\tau}-\theta)}{\bar{\gamma}_2(p_2-\varphi)}.$$

Egyszerű rendezéssel megkapjuk az igazolandó egyenlőtlenséget.

Az 5. tétel bizonyítása

A (16)-beli $\bar{\gamma}_i = 1 + \gamma_i$ jelölést alkalmazva, és behelyettesítve az

$$n_i = \frac{\gamma_i(\hat{\tau}-\theta)}{\bar{\gamma}_i(p_i-\varphi)}$$

képletet [(10a)-t] $\theta = \varphi(f_1 n_1 + f_2 n_2)$-be, implicit egyenletet kapunk φ-re:

$$\theta = \varphi\left[f_1 \frac{\gamma_1(\hat{\tau}-\theta)}{\bar{\gamma}_1(p_1-\varphi)} + f_2 \frac{\gamma_2(\hat{\tau}-\theta)}{\bar{\gamma}_2(p_2-\varphi)}\right].$$

Eltüntetve a nevezőket, a (18)–(20) másodfokú egyenlethez jutunk.