Közgazdasági Szemle, LVI. évf., 2009. szeptember (769–789. o.)

MEDVEGYEV PÉTER

A származtatott termékek árazása és annak problémái az egyensúlyelmélet szempontjából

A szerző röviden összefoglalja a származtatott termékek árazásával kapcsolatos legfontosabb ismereteket és problémákat. A derivatív árazás elmélete a piacon levő termékek közötti redundanciát kihasználva próbálja meghatározni az egyes termékek relatív árát. Ezt azonban csak teljes piacon lehet megtenni, és így csak teljes piac esetén lehetséges a hasznossági függvények fogalmát az elméletből és a rá épülő gyakorlatból elhagyni, ezért a kockázatsemleges árazás elve félrevezető. Másképpen fogalmazva: a származtatott termékek elmélete csak azon az áron képes a hasznossági függvény fogalmától megszabadulni, ha a piac szerkezetére a valóságban nem teljesülő megkötéseket tesz. Ennek hangsúlyozása mind a piaci gyakorlatban, mind az oktatásban elengedhetetlen.
Journal of Economic Literature (JEL) kód: G00.

A jelenlegi gazdasági válság számos negatív következménye mellett egy szembeszökő pozitív következményt mindenképpen meg kell említeni: napjainkban a közgazdásztársadalom meglehetősen nyitott a tudományterületének problémái iránt. Akár a szervezett vitákat, akár a különböző rendezvényeken elhangzó előadásokat, akár a személyes beszélgetéseket vesszük, az őszinteség és a kritikai megközelítés nyilvánvaló. Talán minden közgazdász számára egyértelmű, hogy a korábbi elméletek mindegyikét kritikus szemmel át kell tekinteni. A kritikai elemzésnek ki kell terjednie a konkrét elméletekre, a követett módszerekre, a következtetések erejére, a mögöttük levő filozófiai alapfogalmakra, általában mindenre, amit a tankönyvek tartalmaznak.

Ma még nem látszik, hogy mi a jelenlegi helyzetből kivezető út, sőt talán az sem biztos, hogy van-e egyáltalán kivezető út, vagy egyáltalán szükség van-e kivezető útra. Nem világos, hogy új helyzet állt-e elő, vagy csak a dolgok természetes állapota tért vissza néhány évtized után. Nem tudjuk, milyen tudományos ötletek vannak a fiókokban, legyenek azok műszaki vagy egyéb természettudományos elképzelések, vagy esetleg olyan társadalomtudományi felismerések, amelyek hatékonyan képesek segíteni, a dolgok végleges félresiklását megakadályozni, vagy legalább késleltetni. Nem vagyunk tisztában azzal sem, hogy mekkora a vihar, hol van a vihar, miből veszi az erejét, azt meg végképpen nem tudjuk, hogy a tornádó melyik oldalán vagyunk. Lehet, hogy minden csak pénz kérdése, és a bankokba öntött néhány ezer milliárd mindent rendbe hoz. Lehet, hogy nem. Senki sem tudja.[1]

[1] A válság okai teljességgel nyilván nem tárhatók fel. Alapvetően két okot érdemes megemlíteni. Az egyik a rendszerben levő túlzott kockázat, amelyért nyilvánvalóan a rendszerben levő intézmények felelősek. Ez a válság úgymond szubjektív oka. Ezen bizonyos szintig lehet változtatni. Például alaposabb oktatással el lehet magyarázni a piaci szereplőknek a származtatott termékek árazási problémáit, a túlzott kockázat vállalása adminisztratív mó-

Medvegyev Péter a Budapesti Corvinus Egyetem matematika tanszékének egyetemi docense.

Mi a származtatott termék?

A számos nyitott kérdés közül ebben az írásban egyetlen részletkérdést szeretnék felvetni: a sokat emlegetett származtatott termékek mibenlétét, elemzésének matematikai problémáit. A dolog azért fontos és érdekes, mert egyrészt sokan a származtatott termékeket okolják a válságért, másrészt a származtatott termékek egész irodalma jól példázza a közgazdaságtan általános dilemmáját, módszertani hiányosságait. A származtatott termék fogalma azon technikai jellegű közgazdasági fogalmak közé tartozik, amelyek bekerültek a mindennapi politikai, társadalomtudományi, sőt általában a tudományos közbeszédbe. És nem is véletlenül. Ha van a közgazdaságtanban tudományos elmélet, akkor a származtatott termékek elmélete az. Az elmélet óriási hatást gyakorolt a közgazdaságtan egészére, elsősorban természetesen a pénzügyi elméletre, de az itt megfogalmazott gondolatok, technikai megoldások számtalan más területen is feltűntek. Ennek számos oka van, a legfontosabb azonban talán a mély matematikai háttér és a közvetlen alkalmazás lehetősége. A modern matematika vezető személyiségei foglalkoztak (*Delbaen–Schachermayer* [2006], *Shiryaev* [1999]) az elmélettel, csiszolták, vitatták minden apró részletét, miközben a származtatott üzletek során milliárdok cseréltek gazdát. Ki nem vágyik arra, hogy a tudomány termelőerővé váljon? A pénzügyi matematika olyan, mint a világ minden múzeumában valamilyen formában megtalálható kép: Vénusz és Mars.[2] Az ellentétek természetes egysége. Legmagasabb szintű matematikával sok pénzt keresni! Az absztrakt integrálelmélet, a fraktálok és a fraktáldimenzió pontos nagysága összefügg a tőzsdei árakkal! Micsoda csodálatos dolog! Az ész diadala! Ki nem vágyik erre? Hogyan lehet akkor, hogy ez a csodálatos páros romba döntötte a világot? A válasz nyilván egyszerű: nem ez a páros döntötte romba a rendszert, összedőlt volna az magától is.

A dolgok megértéséhez egy kicsit vissza kell mennünk az alapokhoz. Mi határozza meg az árakat, és persze az árakon keresztül a jövedelmeket, végső soron az egész gazdaság szerkezetét? A közgazdaságtan válasza igen egyszerű: a kereslet és a kínálat.[3] A válasz nem kétséges, hogy helyes, de van vele egy alapvető probléma: semmitmondó. A gond az, hogy tudományos elméletet végső soron csak mérhető, adatokkal alátámasztható fogalmakra lehet építeni. A válasszal kapcsolatban két kérdés merül fel: hogyan mérjük a kereslet és a kínálat nagyságát, illetve milyen ugyancsak mérhető fogalmak határozzák meg a keresletet és a kínálatot. Minden tőzsde egy szervezett piac, amely pontosan azért jött létre, hogy a keresletet és a kínálatot átlátható és dokumentálható, azaz mérhető módon megjelenítse. Éppen ezért a tőzsdei folyamatok megértése lényegében a piac viselkedésének megértése, és így végső soron a közgazdaságtan alapfelvetésének laboratóriumi modellje.

A tőzsdék és általában a pénzügyi világ az a laboratórium, ahol a közgazdasági elméletek, természettudományos értelemben, megfigyelhetők. Sokszor elhangzó érv, hogy a közgazdaságtan nem rendelkezik adatokkal, vagy hogy nincsen mód kísérletekre, a környezeti feltételek alkalmas beállítására stb. Nem állítom, hogy ebben nincsen semmi igazság, de úgy gondolom, hogy számos természettudományos területen a pénzügyek-

---

don korlátozható stb. Van azonban a válságnak egy mélyebb, úgymond objektív oka is. A pénzügyi rendszer egyik feladata az érték időben való transzferálása, a megtakarítások időben való értékállandóságának biztosítása. Egy alapvetően növekedő gazdaságban ez megoldható, de ha például a műszaki innováció nem megfelelően alakul, a környezeti problémák, a túlnépesedés és az ebből eredő általános politikai és ideológiai stb. bizonytalanság tovább folytatódik, akkor az időben való értéktranszfer nem működik, ami a megtakarítások folyamatos értékvesztését fogja jelenteni, ami a pénzügyi rendszer állandó válságában fog megnyilvánulni. (Mibe kell befektetni, mi lesz értékálló húsz, harminc év távlatában, ha már a GM is csődbe mehet, vagy akár a Microsoft is eltűnhet, ha – mondjuk – nem sikerül egy jó operációs rendszert kihoznia?)

[2] Valójában inkább a Tudomány és a Kereskedelem istenei találkoztak, de ez a találka kevésbé látványos, mint a Szépség és a Szörnyeteg románca.

[3] Persze ha sok a hús, a hentes köszön előre, ha kevés, akkor a vevő.

nél jóval kevesebb az adat, és sokkal korlátozottabbak a kísérleti lehetőségek.[4] Nem véletlen, hogy a tőzsdei rendszerek vizsgálata a fizikusok és a matematikusok számára teljesen elfogadott terület, amely tudományos jellegét elvi, filozófiai alapon senki sem kérdőjelezte meg. Sőt.

A pénzügyi matematika célja tehát pontosan az, ami a mikroökonómia célja: megmagyarázni az árak alakulását. Az egyetlen különbség csak az, hogy ezt nem papíron, hanem az absztrakció egy jóval alacsonyabb szintjén, szinte már a rögvalósághoz közel álló praktikum szintjén próbálja megtenni. Ez akkor is igaz, ha a matematikai modell, a köntös, amibe a pénzügyi elméletet felöltöztetjük, jóval bonyolultabb, mint a két egymást keresztező egyenes vonal mikroökonómiai modellje. A bonyolult sztochasztikus modellek csak mint praktikus, közelítő modellek foghatók fel, ahol a modellezést egyetlen szempont hajtotta: a tevékenység kézzelfogható végeredménye. Pénzt akarunk keresni, pontosabban sok pénzt akarunk keresni.[5]

A matematikai pénzügyeken nem kérhető számon a nyilvánvalóan lényegi kérdés: Van-e olyan értékteremtési folyamat, ami indokolja ezt?

A pénzügyi elmélet minden gondolata a szokványos közgazdasági gondolkodás része. Csak a valóság könnyű megragadhatósága, a vizsgált rendszerek pontosan definiált szabályai, valamint az ebből értelemszerűen következő nagyfokú számszerűsíthetőség emeli ki a pénzügyi elméletet a szokásos közgazdasági modellek köréből, amelyek esetén sem az adatbőség, sem a közvetlen megfigyelhetőség, sem az egyszerűség luxusa általában nem adott.[6]

A pénzügyi termékeket az irodalom két csoportba osztja: alaptermékek és származtatott termékek. Az alaptermékek viselkedését nagyrészt statisztikai úton lehet feltérképezni. Az alaptermék, származtatott termék megkülönböztetésről mindig úgy gondolkodtam, ahogyan az elemi lineáris algebra leírja a véges dimenziós vektorterek elemeit. Vannak vektorok a bázisban, és vannak vektorok a bázison kívül. A bázisban levő termékek az alaptermékek, a bázison kívül levő termékek a származtatott termékek.[7] Mivel a bázisból a vektorok ki-be vihetők, ezért az alaptermék származtatott termék megkülönböztetés viszonylagos. A bázison kívül levő vektorok a bázisvektorok lineáris kombinációi. Vagyis a koordinátáik által tökéletesen determináltak.

Ha ismerjük a koordinátákat, mindent tudunk róluk. Például ha ismerjük az alaptermékek árát, akkor tudjuk, hogy mibe kerülnek a származtatott termékek. Egyszerűen venni kell az alaptermékek árának koordinátákkal súlyozott összegét. Ezért is hívják az elméletet ketchupelméletnek. Ha az egyliteres ketchup ára 100 forint, akkor a kétliteres ára 200 forint.[8] Miért? Az ellenkező esetben létrejövő arbitrázslehetőség miatt. Ha ugyanis nem így lenne, akkor a drágábbat eladva, az olcsóbbat megvéve, és az ingyenes átcsomagolás lehetőségét kihasználva, kockázat nélkül pénzt kereshetnénk. Az arbitrázselmélet lényege, hogy a származtatott termékek ára az alaptermékek árának lineáris

[4] Gondoljunk csak az orvostudományra! Egy ritka betegség megértéséhez milyen mennyiségű adatot és kísérleti lehetőséget nyújt a Természet?

[5] Vagyis az adott korlátok között kívánjuk maximalizálni a hasznossági függvényt.

[6] És tegyük hozzá, éppen ez a pénzügyi folyamatok hozzáadott értéke: olyan tükör, amely bár homályos, de mégis valamit visszatükröz. A jelenség, amely a lényeget takarja és megjeleníti egyidejűleg. A társadalomtudományok mindegyike egy súlyos lelki betegségtől szenved: a fizika iránti féltékenységtől. A pénzügyi matematika korlátai valójában a társadalomtudományok korlátai. Ha a pénzügyi matematikának nem sikerült, akkor senkinek sem fog sikerülni. A pénzügyi matematika jutott a társadalomtudományok közül a legközelebb a természettudományokhoz. Úgy látszik azonban, hogy a tükrön levő homály nagyobb, mint gondoltuk (és tegyük hozzá: hála istennek).

[7] Általában alapterméknek azt szokás tekinteni, amely közvetlenül és likvid módon kereskedés tárgya. Így akár egy részvény és a rá vonatkozó opciói is lehet alaptermék – annak ellenére, hogy az opció elvileg a részvény származtatott terméke. Ez csak annak az elvnek a nyomatékosítása, hogy minden annyiba kerül, amennyit adnak érte.

[8] Ebben a példában az egyliteres a bázisban van, vagyis alaptermék, a kétliteres a származtatott termék, és a lineáris függést megadó koordináta éppen kettő.

kombinációja.[9] Másképpen fogalmazva az arbitrázselmélet szerint a pénzügyek lényege, hogy a pénzügyi összefüggések a lineáris algebra és a konvex analízis szabályai szerint alakulnak.[10] Mindenki számára nyilvánvaló, hogy ez nincsen így. Vannak tranzakciós költségek, oszthatatlanságok stb. De miként említettem, a tőzsde egy laboratórium, egy olyan mesterségesen létrehozott piac, ahol a kísérleti feltételeket úgy állítottuk be, hogy lényegében pluszköltség nélkül az egyébként oszthatatlan atomerőmű akár tizenkét és fél százalékát is meg lehet venni.

Az árazás egy absztrakt modellje

A származtatott termékek fogalma és elmélete arra az igencsak megkérdőjelezhető megközelítésre épül, hogy a piacon megfigyelhető termékek között redundancia van, és jórészt a pénzügyi matematikai eszköztár ennek a redundanciának a feltérképezését és kihasználását kívánja megvalósítani. Ahhoz, hogy bizonyos vektorok között redundancia legyen, sok vektor kell és alacsony dimenzió. A redundancia lehetősége egyáltalában nem nyilvánvaló, ha a vektorokat hordozó vektortér dimenziója nagy, főleg nem, ha a tér dimenziója végtelen. A pénzügyek egyik alapvető feltevése, hogy a pénzügyi termékek, szemben az imént vázolt lineáris algebrai modellel, nem egy véges dimenziós vektortér vektorai, hanem egy végtelen dimenziós vektortérben vannak, ugyanis az értékük valószínűségi változó. Végtelen dimenziós vektorterekben a lineáris kombináció nem igazán használható fogalom, sem a koordináta fogalma, sem az előállíthatóság, és így a redundancia fogalma nem kézenfekvő. Az nyilvánvaló, hogy hogyan kell árazni az alaptermékek véges lineáris kombinációit, különösen akkor, ha a bázisvektorok száma igen alacsony. De hogyan kell árazni egy végtelen sor összegét? Intuitíve a válasz nem triviális. Különösen azért nem, mert nem tudjuk, hogy milyen módon kell értenünk a konvergenciát. Mikor mondjuk, hogy az alaptermékek közelítő összege közel van a származtatott termékhez pénzügyi értelemben? Ha a szórásuk közel azonos? Ha az információtartalmuk közel azonos? Bizonyos egyszerűbb helyzetekben az alaptermék–származtatott termék előállítás igen kézenfekvő és átlátható.[11] De például már gyakran a megadott paraméter szerinti (levaníliázott) vételi opció esetén is matematikai modell definiálja az előállíthatóságot, a dinamikus replikálást.[12] A probléma megértéséhez tekintsünk egy egyszerű formalizált modellt![13]

1. Két időpont van: „ma” és „holnap”.
2. A „holnap” időpontban legyen értelmezve egy $(\Omega, A, \mathbf{P})$ valószínűségi mező. A téren értelmezett valószínűségi változóknak legyen adott egy L halmaza, amelyet a lehetséges pénzügyi eszközök „holnapi” értékeinek halmazának képzelünk el. Valamely ξ pénzügyi eszköz „holnapi” értéke ismeretlen, és így valószínűség változó. A $\mathbf{P}$ a tényleges statisztikai valószínűség, és az egyes $\xi \in L$ eszközök árának eloszlását írja le.

[9] Természetesen a bonyolultabb műveletekre – mint például a szorzás – a dolog már nem működik. Vagyis például az alaptermék négyzetének az ára nem az ár négyzete. Éppen arról szól a származtatott termékek elmélete, hogy ilyenkor mit kell tenni, hogyan kell meghatározni a nemlineáris transzformációkkal létrehozott termékek árát.

[10] Némiképpen leegyszerűsítve: a származtatott termékek árazása lényegében lineáris egyenletrendszerek megoldása. Valahol valóban erről van szó, miközben a matematikai alapmodellt a végtelenségig bonyolítottuk, és ezért az „anyja sem ismer rá”.

[11] Vö. *Hull* [1997], különösen a könyv első fele.

[12] Vagyis nem a pénzügyi világ szereplői tárták fel az összefüggést, hanem az egy speciális modell speciális tulajdonsága, amit egyébiránt a piaci szereplők maximum tisztelettudóan elhisznek, de soha meg nem értenek.

[13] Vö. *Cochrane* [2001]. Az írás megértéséhez nem kell különösebb matematikai jártasság. A matematikában járatlan olvasónak nem kell a cikket feltétlenül ezen a ponton letenni.

3. Az alapgondolat/feltétel, hogy az elhanyagolható tranzakciós költségek miatt az L egy lineáris tér: ha ξ_1 és ξ_2 két pénzügyi eszköz, akkor mindig megengedjük, hogy ezekből tetszőleges módon, tetszőleges súlyokkal portfóliót létesítsünk. Ez a feltétel emlékeztet a lineáris tevékenységelemzési modell alapfeltételére. Az egyetlen eltérés, hogy most negatív súlyok is megengedettek. A pénzügyi eszközök tetszőleges, költségmentes kombinálhatósága a pénzügyek alapaxiómája, alapfeltétele.

Nyilván ez a modell idealizál, a valóságban vannak költségek, de a pénzügyi elmélet alapfeltevése a korlátlan és költségmentes portfólióképzés. A pénz olyan speciális áru, amely nagyon alacsony tranzakciós költségek mellett cserélhető térben és időben.[14] A modell megértéséhez érdemes hangsúlyozni a következőket.

1. Egy $\xi \in L$ valószínűségi változó lehet valamilyen későbbi időpontban esedékes kifizetés. Az időpont lehet a „holnap" után is, és a ξ értéke nyilván függhet ettől az időponttól. Így az L dimenziója nagyon nagy, esetlegesen végtelen is lehet, ugyanis a figyelembe veendő időpontok számát nem tudjuk értelmesen korlátozni.
2. Az L nem feltétlenül egyezik meg az összes valószínűségi változó halmazával, hanem esetleg annak csak egy valódi altere.[15] Ennek oka, hogy nem minden egyes ω kimenetelhez, van biztosítás. Bekövetkezhetnek olyan ω kimenetelek, amelyekre nem számítottunk, és nem kötöttünk biztosítást. Másképpen: lehetnek olyan valószínűségi változók, amelyek nem elemei a lehetséges portfóliók L terének. Ilyenkor mondjuk, hogy *a modell nem teljes.*

Mi egy holnap realizálódó valószínűségi változó mai ára? Mit kell fizetni „ma", hogy „holnap" megkapjuk a ξ változót? Ha $\pi(\xi)$ jelöli a ξ változó által leírt eszköz „mai" árát, akkor axiómaszerűen feltesszük, hogy a $\pi(\xi)$ a ξ lineáris függvénye:

$$\pi(a\xi_1 + b\xi_2) = a \cdot \pi(\xi_1) + b \cdot \pi(\xi_2).$$

Ha a π árfüggvény lineáris, akkor azt szokás mondani, hogy teljesül az egy ár törvénye.

Ha az egyetlen ár törvénye nem teljesülne, akkor a szabad és költségmentes portfólióképzítés szabálya/feltétele miatt az olcsóbbat meg lehetne venni, a drágábbat el lehetne adni és így végtelen pénzt lehetne keresni.

Az, hogy az árak a lehetséges megoldások halmazán értelmezett lineáris függvények, mindig is ismert volt az egyensúlyelméletben. Valamely téren értelmezett lineáris függvényeket a tér duálisának szokás mondani. A dualitáselméletnek a közgazdaságtanban számtalan alkalmazása van. Gondoljunk csak a lineáris programozás dualitási tételeire, a duális megoldás árnyékárként való értelmezésére, vagy például a marxi elmélet Bródy András által javasolt interpretációjára, amely a dualitáselmélet egyik legszellemesebb megfogalmazása, vagy a Neumann-modellre, a Gale-modellre stb.!

A pénzügyi alkalmazások a dualitáselmélet használatában csak annyival lépnek előre, hogy explicit módon használják azt a tényt, hogy a befektetések eredménye bizonytalan. Ennek következtében a lehetséges stratégiák halmaza nem egy véges dimenziós vektortér részhalmaza, hanem egy függvénytér, a valószínűségi változók terének egy részhalmaza. Végtelen dimenziós terekben azonban a duális tér elemei nem a lineáris függvények, ha-

[14] Ha hinni lehet a Róma című tévésorozatnak, a római állam teljes kincstára egy ökrös szekéren elfért, és szükség esetén könnyen kimenekíthető volt.

[15] Sőt. Ha L az összes valószínűségi változók tere, akkor az L-et nem lehet olyan matematikai struktúrával ellátni, amely alkalmassá teszi a dualitás elméletének alkalmazását. (A technikai kifejezés az, hogy ilyenkor az L nem lokálisan konvex.) A hallgatólagos feltétel az, hogy az L elemein definiált valamilyen norma, amely norma megmondja, hogy milyen nagy és milyen kockázatos az adott vektor. Például feltesszük, hogy az L elemeinek van várható értéke, vagy bizonyos momentumaik végesek.

nem a folytonos lineáris függvények. Ezen nem kell különösebben csodálkozni, ha egy lineáris függvény nem lenne folytonos, egyszerűen nem tudnánk róla semmi értelmeset mondani. Véges dimenziós terekben minden lineáris függvény automatikusan folytonos, végtelen dimenziós terekben azonban léteznek nem folytonos lineáris függvények. Ugyanakkor a nem folytonos függvények rendkívül patologikus objektumok, amelyek az értelmes matematikai elemzést lehetetlenné teszik. Vegyük azonban észre, hogy a folytonosság feltétele automatikusan magával hozza az alaptér elemei nagyságának szükségszerű definiálását! Explicit módon valahogyan értékelni kell, hogy mekkorák az egyes valószínűségi változók. Mikor mondjuk, hogy két változó közel van, és mikor mondjuk, hogy nem? Ez azonban bizonyos értelemben már valamilyen hasznossági függvény bevezetését jelenti.

A modern matematika egyik stratégiai értelemben alapvető felismerése, hogy a folytonos lineáris függvények általában integrálként reprezentálhatók. Számos matematikai tétel létezik, amely szerint a folytonos lineáris függvények integrálként írhatók fel.[16]

1. TÉTEL (REPREZENTÁCIÓ ELV). *Tegyük még fel, hogy a π valamilyen értelemben folytonos. Ekkor*

$$\pi(\xi) = \int_\Omega \xi d\mu$$

alakban integrálként reprezentálható.

A μ a **P**-hez hasonlóan egy mérték, vagyis az egyes lehetséges A eseményekhez hozzárendel egy számot. Ha $\xi \geq 0$, akkor feltehető, hogy $\pi(\xi) \geq 0$, így a μ valódi mérték, vagyis nincs olyan halmaz, amelyre $\mu(A) < 0$ lenne. Tegyük fel, hogy van kockázatmentes termék,[17] vagyis tegyük fel, hogy $1 \in L$. Az 1 változót szokás elemi kötvénynek mondani. Mivel

$$\pi(1) = \int_\Omega 1 d\mu = \mu(\Omega)$$

véges,[18] ezért a μ véges mérték. Legyen $(1+r)^{-1} \doteq \mu(\Omega)$ Ha bevezetjük a

$$\mathbf{Q}(A) = \mu(A) / \mu(\Omega) = \mu(A)(1+r)$$

új mértéket, akkor a **Q** valószínűségi mérték ugyanis nem negatív, és a teljes halmaz mértéke éppen 1. Ekkor definíció szerint

$$\pi(\xi) = \int_\Omega \xi d\mu = \frac{1}{1+r}\int_\Omega \xi d\mu(1+r) = \frac{\int_\Omega \xi d\mathbf{Q}}{1+r} = \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\xi)}{1+r},$$

az imént megadott **Q** valószínűségi mértékkel. Az ár megegyezik a „holnapi" kifizetés diszkontált várható értékével. Az egyetlen csavar, hogy a várható értéket nem a statisztikailag megfigyelhető **P** szerint, hanem a matematikai képzelet világában létező **Q** szerint kell venni.

A **Q** *szokásos neve kockázatsemleges mérték. Ennek oka, hogy a* **Q** *alatt a π diszkontált várható kifizetés.*[19] *Az r-et szokás kockázatmentes hozamnak is mondani.*

[16] Hangsúlyozni kell azonban, hogy ez csak egy elv, ilyen tétel valójában nincsen, ugyanis túl általános, de nagyon sok ilyen jellegű tétel van.

[17] Ez valójában egy igen ártalmatlan feltétel, és tulajdonképpen azt jelenti, hogy van olyan $\xi \in L$ termék, amely értéke mindenképpen pozitív. Ha az összes terméket ennek a terméknek az árában fejezzük ki, akkor a ξ ára $\xi/\xi \equiv 1$ lesz. Vagyis az $1 \in L$ feltétel azt jelenti, hogy megadható egyetlen ármérce, amely egyúttal kereskedhető termék.

[18] A modell axiomatikus feltétele szerint minden megengedett portfólió ára véges.

[19] Azt mondjuk, hogy valaki kockázatsemleges, ha valamely változó várható értékét azonosnak tekinti a változó értékével. Némiképpen árnyaltabban: azt mondjuk, hogy valaki kockázatsemleges, ha a valószínűségi változókon értelmezett hasznossági függvénye egyrészt $U(\xi) = \mathbf{E}[u(\xi)]$ alakba írható, másrészt az u lineáris függvény. Ez másképpen azt jelenti, hogy a hasznossági függvény a várható hasznosságok lineáris kombinációja.

A mértékcserét általában az opcióárazáshoz szokás kötni, és ott „meglepetést" okoz. És tegyük hozzá rengeteg félreértést. Számos szempontból a kockázatsemleges mérték és a kockázatsemleges árazás elve okolható a banki kockázatvállalás félreértéséért, így végső soron megnövekedéséért. Így a gondolatmenetünk szempontjából nem lényegtelen lépésről van szó. Vegyük észre, hogy a mértékcserének és az árazóképletnek közvetlenül semmi köze az opcióárazáshoz. Valójában egy teljesen univerzális elvről van szó, ahol a fő szerepet a linearitás és folytonosság és az ebből következő reprezentációs elv játssza. Vagyis a **Q** mérték egyszerűen a duális tér egy eleme, amelynek semmilyen valószínűségszámítási[20] tartalma sincs.

Vegyük észre, hogy ha valamely termék egy pozitív valószínűségi halmazon pozitív, akkor az ára is pozitív, és megfordítva. Ebből következik a 2. tétel.

2. TÉTEL. *A* **P** *és a* **Q** *mértékek ekvivalensek, vagyis valamely A halmaz valószínűsége a* **P** *alatt pontosan akkor nulla, ha a* **Q** *alatt is nulla.*

Érdemes azonban egy kicsit a dolgokat jobban megvizsgálni. A π linearitása a tranzakciós költségek elhanyagolását jelenti, és első körben megengedhetőnek látszó absztrakció. Ugyanakkor a reprezentációs elv csak folytonos lineáris függvények esetén teljesül. A véges és a végtelen dimenziós terek között van egy lényeges eltérés. Véges dimenziós terek esetén a konvergencia fogalma egyértelmű. Végtelen dimenziós terekben azonban ez nincsen így. Egyáltalában nem nyilvánvaló, hogy két valószínűségi változót mikor tekintünk közelinek. Ez a konkrét alkalmazástól függ. Ennek megfelelően az árazó függvény folytonossága valamilyen további feltétel bevezetése nélkül nem feltétlenül teljesül. Ha $\xi_n \to \zeta$ és $\eta_n \to \zeta$ az $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ térben akkor, az L^1 tér definíciója miatt az átlagos hozamok konvergálnak.[21] Ugyanakkor ha a $(\xi_n - \zeta)$ szórása a végtelenhez tart és a $(\eta_n - \zeta)$ szórása nullához tart, akkor pénzügyileg a két helyzet teljesen különböző. Feltehetőleg $\pi(\xi_m) \nearrow \infty$, így a folytonosságot jelentő

$$\lim_{n\to\infty} \pi(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} \pi(\eta_n) = \pi(\zeta)$$

egyenlőség nem teljesülhet. Abból, hogy a hozamok konvergálnak,[22] az áraknak nem kell feltétlenül konvergálniuk! Figyelembe kell venni a kockázatot is! Ez azt is mutatja, hogy az L zártsága nem természetes feltétel. Elképzelhető, hogy az L valamelyik határpontjának az ára végtelen, vagyis a π nem terjeszthető ki véges módon az L lezártjára! Problémát jelent azonban, hogy a kockázat nem jól és főleg nem egyértelműen definiált fogalom. A kockázat egy szubjektív érzés, amely az egyes individuumok hasznossági függvényétől függ. A matematikai pénzügyi irodalom a kockázatról mint mérhető fogalomról beszél. Olyan fogalomról, mint a villamos energia vagy a hőenergia, amely nagyságát egyértelműen[23]

[20] Valószínűségről általában akkor beszélünk, ha léteznek valamilyen értelemben ismétlődő kísérletek, és ezekhez köthető relatív gyakoriságokról, átlagokról akarunk valamit mondani. Most ilyenek nincsenek. Ezért a modell nem igazán része a klasszikus valószínűségszámításnak. Sokkal inkább a dualitáselméletnek, vagyis a hagyományos értelemben vett matematikai közgazdaságtannak. Minden valószínűség az eseménytéren értelmezett mérték, de nem minden mérték valószínűség. Az, hogy a lineáris függvényt reprezentáló mértéket valószínűségként értelmezzük, körülbelül olyan, mintha azt állítanánk, hogy minden pilóta minden reggel megeteti a lovát.

[21] Az L^1; L^2 stb. jelöléseknek nincsen szerepe. Tartalmukat mindig a szimbólum megjelenésekor megmagyarázzuk. Ha a felső index véges, akkor a felső index arra utal, hogy hány momentum konvergenciáját várjuk el a konvergencia során.

[22] Természetesen a megadott metrika szerint. Ha a metrikát az L^1 tér definiálja, akkor a konvergencia átlagban való konvergenciát jelent, így a hozamok átlagos eltérése konvergál, amiből persze következik, hogy az átlagos hozamok konvergálnak, de nem következik, hogy maguk a hozamok, mondjuk kimenetelenként konvergáljanak.

[23] Nem vagyok a terület szakértője, de nem lennék meglepve, ha ott sem lenne a dolog annyira egyszerű, mint ahogy a magamfajta kívülállók azt hiszik.

meg lehet mondani, és egyik üzletből a másikba át lehet önteni, át lehet csomagolni stb. Miközben az átcsomagolhatóság nyilvánvalóan csak egy metafora, ezt sokan talán kezdték komolyan venni, és nem lennék meglepve, ha sokan úgy gondoltak volna rá, mint a lejárt szavatosságú sajt átcsomagolására *(business is business).*

A kockázat a hasznossági függvénytől elválaszthatatlan fogalom. A kockázat megfigyelése részben a hasznossági függvény megfigyelését jelenti. A konvergenciához szükséges metrika a kockázat és így végső soron a hasznossági függvény megfigyelésére épül. Ha a kockázatot a szórással definiáljuk, akkor minden rendben van, ugyanis az $L^1(\Omega)$ helyett az $L^2(\Omega)$ térben való folytonosságot kell feltenni, még tán egyszerűbb is a reprezentációs tételt igazolni, ugyanis könnyebb belátni a reprezentációs tételt L^2-ben, mint L^1-ben. Ilyenkor az $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tér definíciója miatt a várható hozam mellett a szórások is konvergálnak, így nem csak a hozam, hanem a kockázat is konvergál, így hihetőbb feltétel az, hogy az olyan portfóliók halmaza, ahol a π árfüggvény véges, zárt részhalmaza a lehetséges portfólióknak. Ugyanakkor továbbra is kérdéses, hogy ha az átlagos hozamok és a szórások konvergálnak, akkor az árak is konvergálnak-e. Miért nincsen harmadrendű feltétel? A folytonossági feltétel teljesülése általában a következő egyszerű tétellel kényszeríthető ki:[24]

3. TÉTEL. *Ha π valamely rendezett Banach-téren[25] értelmezett nem negatív lineáris funkcionál, akkor a π folytonos.*

BIZONYÍTÁS. Definíció szerint a π lineáris, és

$$\xi \geq 0 \Rightarrow \pi(\xi) \geq 0.$$

Legyen (ξ_n) nullához tartó sorozat.[26] Mivel a nemnegativitás és a linearitás miatt $|\pi(\xi_n)| \leq \pi(|\xi_n|)$, elég megmutatni, hogy a jobb oldal nullához tart. Ezért feltehető, hogy ξ_n nem negatív. Elég megmutatni, hogy minden (ξ_n) sorozatnak van (ξ_{n_k}) részsorozata, amelyre a $\pi(\xi_{n_k})$ nullához tart. Elég ritka sorozatot véve, a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{n_k}$ összeg konvergens. (Vegyük azt a részsorozatot, amelyre $\|\xi_{n_k}\| \leq 2^{-k}$!) Legyen a határérték ξ_∞. Világos, hogy a π monotonitása és a $\xi_{n_k} \geq 0$ miatt

$$\sum_{k=1}^{N} \pi\left(\xi_{n_k}\right) \leq \pi\left(\xi_\infty\right) < \infty.$$

Mivel ez minden N-re igaz, a $\sum_{k=1}^{\infty} \pi\left(\xi_{n_k}\right)$ sor konvergens, következésképpen $\pi(\xi_{n_k}) \to 0.$

A tétel pontos megértéséhez érdemes jelezni, hogy a teljesség kifejezést a matematikusok és a pénzügyesek eltérő értelemben használják. Matematikában akkor mondjuk, hogy egy halmaz teljes, ha a Cauchy-sorozatok konvergensek, ami szemléletesen azt jelenti, hogy a térben nincsenek lyukak, hézagok.[27] A pénzügyi irodalomban a teljesség azt jelenti, hogy a tér minden eleme előállítható, replikálható[28] az alaptermékek segítségével. Mi-

[24] A lényeg, hogy az árak nemnegativitása kikényszeríti a folytonosságot, amely már lehetővé teszi a reprezetációs tétel használatát. Ehhez azonban implicite fel kell használni, hogy az alaptér zár. V. ö. *Hansen–Richard* [1987].

[25] A Banach-tér fogalma az azt nem ismerő olvasó számára érdektelen. A dolog lényege, hogy a nemnegativitás és a teljesség igen általános feltételek mellett implikálja a folytonosságot. A tételben a feltételi halmaz a teljes alaptér, vagyis az összes, figyelembe vett valószínűségi változónak van ára, vagyis a modell teljes. Ez azonban igen szigorú feltétel. A bizonyítás minden további nélkül kihagyható.

[26] A linearitás miatt elegendő egy pontban ellenőrizni a folytonosságot. Legyen ez a nulla pont, ugyanis ott kényelmes dolgozni.

[27] A tér olyan, mintha vízzel lenne feltöltve.

[28] Hogy a replikálás során milyen műveletek engedhetők meg, az függ a modelltől.

vel a valószínűségi változók különböző terei általában matematikai értelemben teljesek,[29] és ezért rendezett Banach-teret alkotnak, a tétel alkalmazásához elegendő megkövetelni, hogy a modell közgazdasági értelemben is teljes legyen, vagyis minden változó replikálható legyen. Vagyis a tételhez szükséges matematikai teljességet azzal kényszerítjük ki, hogy feltesszük a közgazdasági értelemben való teljességet.[30] Egy a matematikai teljességgel kapcsolatos másik fontos egyszerű észrevétel, hogy teljes terek zárt részei is teljesek, vagyis ahhoz, hogy a tételt alkalmazni tudjuk, vagy azt kell biztosítani, hogy a tér minden eleme előállítható legyen az alaptermékek segítségével, vagy azt, hogy az előállítható vektorok halmaza legalább zárt legyen, vagy ami ugyanaz, a lehetséges portfóliók lezártjának minden eleme lehetséges portfólió legyen.[31] Mivel a nemnegativitás az árazó funkcionál esetén közgazdasági okokból triviálisan feltehető, ezért érvényes a tétel következménye.

KÖVETKEZMÉNY. *Ha a piac teljes, és minden követelés várható hozama véges,*[32] *akkor érvényes a reprezentációs elv, így alkalmas r konstanssal és* **Q** *mértékkel minden követelés ára*

$$\pi(\xi)=\frac{1}{1+r}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\xi)$$

módon írható.

A közgazdaságtanban a különböző stratégiahalmazokról általában fel szokás tenni a halmaz zártságát. Véges dimenziós terekben ez legtöbbször nem erős megkötés, végtelen dimenziós terekben azonban, miként ezt többször jeleztük, ez szigorú és a közgazdasági alapfeltételektől függő megkötésnek számít. A zártsághoz a konvergenciafogalmat explicit módon meg kell adnunk, és a stratégiahalmazok zártsága mögött szigorú implicit feltételek húzódhatnak meg, amelyek teljesülése a pénzügyi modell közgazdasági megkötéseiből nem feltétlenül következik, vagy csak olyan körülmények között, amelyek a modell tényleges használatát erősen lekorlátozzák.

Felvetheti valaki, hogy a bizonyításból látható, hogy a gondolatmenet általánosítható, és nem kell például feltenni, hogy minden számba jöhető véges várható hozammal rendelkező változónak legyen ára. Elegendő megkövetelni, hogy ha valamilyen ξ kifizetésnek van ára, akkor a $|\xi|$-nek is legyen ára. Ehhez elegendő feltenni, hogy az összes lehetséges vételi opciónak legyen ára. Ez másképpen azt jelenti, hogy tetszőleges termék esetén van egy olyan kereskedett termék, amelynek kifizetése pontosan azonos az adott termék pozitív részével. Vagyis a piac elég sok terméket tartalmaz, így mindenfajta veszteség a piacon található kereskedett termékkel lefedezhető (*Hansen–Richard* [1987]). Vagyis mindenfajta veszteséget valaki hajlandó átvállalni.

Érdemes hangsúlyozni, hogy a szabad portfólióképzés kézenfekvő feltétele csak azt garantálja, hogy az L lineáris altér legyen. Ilyenkor az árazó függvény folytonosságának kikényszerítéséhez azonban fel kell tenni, hogy az L bizonyos nemlineáris műveletekre – mint például a vételi opció – is zárt legyen. Az opciók árazása azonban távolról sem triviális, magától értetődő, ugyanis egy nemlineáris műveletről van szó. Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy miként kell árazni, vagy egyáltalában be lehet-e árazni azt a követelést, amely-

[29] Erről is sok tétel van. A Banach-tér fogalma többek között a teljességet írja elő, és az alkalmazások szempontjából igen enyhe feltételnek számít.

[30] Ugyanis ha az L szűkebb, mint az összes változó halmaza, akkor honnan tudjuk, hogy a replikálható elemek L halmaza nem tartalmaz réseket?

[31] Miként ezt korábban jeleztük, ez közgazdaságilag és matematikailag is egy nem triviális feltétel. Nem véletlen, hogy az úgynevezett eszközárazás alaptételei, mind a következőkben definiált C halmaz zártságának igazolásából áll.

[32] Vagyis $L = L^1(\Omega)$, vagy ha a kockázatot is figyelembe akarjuk venni, akkor $L = L^2(\Omega)$, esetleg $L = L^p(\Omega)$, ahol $1 \leq p < \infty$.

ben elhagyjuk a lehetséges veszteségeket. Miért van bárki a piacon, aki hajlandó mondjuk megvenni egy vételi opciót? A pénzügyi elmélet szerint a vételi opció megvétele nem okoz extrakockázatot, ugyanis az opció dinamikusan fedezhető. Természetesen feltéve, hogy a piac teljes, például egy Wiener-folyamat generálja a kockázatokat, vagyis igen speciális és igen megszorító matematikai extrafeltételek teljesülése esetén. Minden más esetben a vételi opciók áráról nem tudunk semmit, hasonlóan ahhoz, ahogyan a piaci szereplők hasznossági függvényéről sem tudunk semmit, és így a kockázatsemleges, vagyis a hasznossági függvénytől mentes árazás elve egy olyan alap, amelyre csak légvárat lehet építeni.

Martingálok és martingálmértékek

A fenti árazási modell igen absztrakt. A különböző közgazdasági modellekben pontosan specifikálni kell az L lehetséges porfóliókat (*Cochrane* [2001]). Az egyik legismertebb ilyen modell a származtatott termékek árazását leíró modell. Először a diszkrét időhorizont esetét tárgyaljuk.

A T-vel jelölt időperiódusok száma véges, a lehetséges S_i alaptermékek száma m, amely szintén véges. Az S egy m hosszúságú vektorból álló T hosszúságú idősor, amelynek elemei valószínűségi változók. $S_i\,(t,\,\omega)$ azt adja meg, hogy az i-edik termék a t-edik időpontban mennyit ér, feltéve, hogy az ω kimenetel „jött be". Az $S_i\,(t,\,\omega)$ nyilván lehet pozitív és negatív is.

Minden t-edik időpontban adott egy $\mathcal{F}_t$ eseménytér, amely a t-edik időpontig bekövetkezett és megfigyelhető eseményeket írja le. Világos, hogy minden t-re $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1}$.

Mi a T-edik időpontban értelmezett valamely H_T véletlen követelés ára a jelenben? A válasz természetesen az, hogy nem tudjuk: függ a kereslettől és a kínálattól. Van azonban egy speciális eset, amikor a H_T véletlen követelés „lefedezhető", vagyis az alaptermékekből „kikeverhető". Ilyenkor a H_T és az S alaptermékek ára összefügg! Mivel az S árai a jelenben ismertek, a H_T jelenlegi ára matematikai úton kiszámolható. Ilyenkor is a már említett

$$\pi\left(H_T\right)=\frac{1}{1+r_T}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_T\right)$$

képlet alapján határozzuk meg az árat.[33]

Egy **Q** *mértéket az S martingál mértékének mondjuk, ha az S martingál a* **Q** *alatt, vagyis minden t-edik időpontban:* $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[S(t+1)\mid\mathcal{F}_t\right]=S(t)$.

Vegyük észre, hogy az eredeti **P** mérték alatt az S elemeinek nincs feltétlenül várható értéke, a **Q** alatt azonban nemcsak hogy létezik a várható érték, hanem az idő szerint még konstans módon is alakul, vagyis $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[S(t+1)\right]=\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[S(t)\right]$. Vezessük be a

$$K \doteq \left\{H : H=\sum_{t=1}^{T}\left[S(t)-S(t-1)\right]\theta(t)\right\}$$

halmazt, ahol θ az előre jelezhető stratégiákon fut keresztül, vagyis ahol a $\theta\,(t)$ minden t-re $\mathcal{F}_{t-1}$-mérhető, ugyanis a modell közgazdasági tartalma miatt az aktuális időperiódusban használt portfóliósúlyokat előre meg kell adni. A K az $S(t)$ árfolyamok megváltozásából származó lehetséges árfolyamnyereségek halmaza. Az analízisben megszokott módon jelölje L_+^0 a nem negatív valószínűségi változók halmazát. Vezessük be a $C \doteq K - L_+^0$, valamint a cl(C) halmazokat, ahol a lezárás a sztochasztikus konvergenciában értendő, és a

[33] A T indexnek nincsen jelentősége, csak arra utal, hogy a diszkontálást nem egy periódusra, hanem T időszakra kell venni.

C definíciójában a kivonásjel a komplexuskivonást jelent![34] Feltesszük, hogy nem lehet a θ portfóliót dinamikusan úgy összeállítani, hogy kockázat nélkül nyereséghez jussunk. Vagyis nem lehet olyan H valószínűségi változót a megadott módon előállítani, amelyre $H \geq 0$, vagyis soha nem veszítünk, ugyanakkor egy pozitív mértékű halmazon $H > 0$, vagyis egy pozitív valószínűségű halmazon azért nyerünk.

Ha ilyen H nincsen, akkor azt mondjuk, hogy nincsen arbitrázs.

Diszkrét, véges időhorizont esetén az úgynevezett eszközárazás első alaptételének legáltalánosabb alakja a következő (*Delbaen–Schachermayer* [2006], *Elliott* [2005]).

4. TÉTEL (DALANG–MORTON–WILLINGER). *A következő állítások ekvivalensek:*

1. $C \cap L_{+}^{0} = \{0\}$.

2. $C \cap L_{+}^{0} = \{0\}$ és $C = \mathrm{cl}\,(C)$.

3. $\mathrm{cl}\,(C) \cap L_{+}^{0} = \{0\}$.

4. *Megadható olyan* **Q** *valószínűség, amely ekvivalens az eredeti* **P** *valószínűségi mértékkel, amelyre a d***Q***/d***P** *Radon–Nikodym-derivált korlátos, és amely mellett az S m-dimenziós martingál.*[35]

Érdemes hangsúlyozni, hogy a tételben szereplő első állítás azt jelenti, hogy nincsen olyan $\left[\theta(t)\right]_{t=1}^{T}$ előre jelezhető stratégia, amelyre

$$\sum_{t=1}^{T}\left[S(t)-S(t-1)\right]\theta(t) \geq 0$$

és egy pozitív mértékű halmazon az egyenlőtlenség szigorú. Másképpen fogalmazva, az első állítás szerint nincsen arbitrázs. A tétel szerint annak szükséges és elegendő feltétele, hogy ne legyen arbitrázs, éppen az, hogy az eszközök árfolyama egy alkalmas mérték esetén martingál legyen. De mire jó ez az állítás?

Tegyük fel, hogy egy H_T követelést sikerült előállítani egy λ kezdeti befektetés és egy $\sum_{t=1}^{T}\left[S(t)-S(t-1)\right]\theta(t)$ összegeként, vagyis

$$H_T = \lambda + \sum_{t=1}^{T}\left[S(t)-S(t-1)\right]\theta(t).$$

Ha **Q** martingálmérték, akkor a két oldalon a **Q** szerint várható értéket véve

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_T\right) = \lambda + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T}\left(S(t)-S(t-1)\right)\theta(t)\right) = \lambda + \sum_{t=1}^{T}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left(S(t)-S(t-1)\mid\mathcal{F}_{t-1}\right)\theta(t)\right)\right) = \lambda.$$

Mivel a $\sum_{t=1}^{T}\left[S(t)-S(t-1)\right]\theta(t)$ költsége nulla,[36] ezért arbitrázsmegfontolások szerint az ár csak a λ kezdeti befektetés lehet. Így[37]

$$\pi\left(H_T\right) = \lambda = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_T\right).$$

[34] Vegyük észre, hogy a következő tétel egyik legfontosabb mondanivalója, hogy a *nincsen arbitrázs* feltétele kikényszeríti az előző pontban „reklamált” zártságot. Vagyis a *nincs arbitrázs* feltételének célja éppen a zártság biztosítása.

[35] Egy egyszerűbb esetben – amikor a valószínűségi mező végesen generált – a tétel bizonyítását később megadjuk. A tétel bizonyítása analóg és lényegében egy dualitási tételről van szó.

[36] Hiszen nincsenek tranzakciós költségek.

[37] Vegyük észre, hogy az $S(t) - S(t-1)$ csak akkor értelmes, ha a diszkontáló kamatláb nulla. Így éppen a már bemutatott általános összefüggést kapjuk. Az általános eset, amikor a kamatláb tetszőleges, az úgynevezett önfinanszírozó portfóliókkal, közgazdasági és matematikai megfontolások együttes alkalmazásával visszavezethető a nulla kamatlábas esetre, és az általános esetben pontosan a diszkontált várható értékes képletét kapjuk.

Vegyük észre, hogy ismét a már említett ketchupelvről van szó! Ha egy termék más termékek lineáris kombinációja, akkor az ára is az előállító termékek árainak lineáris kombinációja. A konkrét helyzetben az előállításban szereplő egyik tétel költsége nulla, így csak a másik komponens ára számít, ami éppen λ. A martingálmérték csak annyiban játszik szerepet, hogy segítségével a λ egyszerűen kifejezhető.

De mi van az olyan követelésekkel, amelyek nem fedezhetők le a megadott módon? Nyilván ilyenkor a gondolatmenet nem érvényes, ugyanis a kívánt tulajdonságú λ nem létezik. Persze ilyenkor is vehetünk egy martingálmértéket, és kiszámolhatjuk a diszkontált várható kifizetést, de annak semmi köze a termék árához, ugyanis a terméket nem tudtuk fedezéssel replikálni, így a gondolatmenet nem működik. Ennek megfelelően csak akkor tudjuk az árazási képletet használni, ha feltesszük, hogy a piac teljes, ugyanis ellenkező esetben egy konkrét termék esetében nem tudjuk az összefüggést alkalmazni.[38] Diszkrét időhorizont esetén azonban teljes piacon egy meglepetés vár minket. Véges és diszkrét időhorizont esetén minden teljes piac szükségszerűen véges számú atomból álló valószínűségi mezőt feltételez, és az S alaptermékek árfolyama egy olyan véges fával írható le, ahol az egyes elágazások száma éppen azonos a termékek számával, vagyis például a közismert kötvény–részvény modellben a fa egy binomiális fa (*Elliott* [2005]). Ilyenkor a modell a bevezető kurzusok binomiális modelljére redukálódik. Másképpen fogalmazva, a teljes és arbitrázsmentes piacok a gyakorlati alkalmazások szempontjából túlságosan is egyszerű szerkezetűek. Nem véletlen tehát, hogy a matematikai pénzügyi irodalom folytonos időhorizontú modellekkel dolgozik. A közgazdaságtan egészében jól megszokott diszkrét idejű modellek egyszerűen ultratriviálisak. Nincs mit „eladni". Vagyis a matematikai pénzügyek nehézségei az alkalmazott modell egy lényegtelen technikai feltételéből származnak. Nevezetesen az időhorizont „alkalmatlan" megválasztásából. Binomiális modellben mindenki tud árazni, azt mindenki meg tudja érteni, a folytonos időhorizontú modellek megértéséhez már igen alapos matematikai felkészültség kell, amivel nagyon kevesen rendelkeznek.

Érdemes itt egy pillanatra megállni. A bevezető matematikai pénzügyes kurzusok mindegyike a tárgyalást a binomiális modellel kezdi.[39] Valóban káprázatos, ahogyan a modellben kiszámoljuk a derivatívák árát. Valóban megdöbbentő, hogy az opció ára nem függ a valószínűségektől és a hasznossági függvényektől. Egy dolgot azonban minden idevágó tankönyv elfelejt elmondani, nevezetesen hogy csak ebben az igen speciális esetben működik a dolog. Ez ha lehet, még inkább megdöbbentő.

A hallgató azzal az érzéssel távozik, hogy a származtatott termék értéke a piaci szereplők kockázatvállalási képességétől függetlenül beárazható, úgymond objektív árral rendelkezik. Ha nem ezt mondja, a vizsgán megbukik. Szinte hihetetlen, hogy elsikkadt az az egyszerű kérdés, hogy egy három elágazást tartalmazó fa esetén az ötlet nem működik, és az egész, valóban igen szellemes trükk egyszerűen nem használható általában. Ennek az észrevételnek csupa nagybetűvel, középre szedett módon kellene a binomiális modell tárgyalása után szerepelnie. Hogy lehet az, hogy könyvek százai nem hangsúlyozzák ezt a triviális kérdést? Hogy lehet, hogy ez a kérdés a kollektív közgazdasági tudatban egyszerűen elsikkadt,[40] és ha valakiben a rossz érzés feltámadt, azonnal el is hessegette? Ezek

[38] Felvetheti valaki, hogy attól még, hogy a piac nem teljes, egy konkrét követelést még beárazhatunk az elmélet segítségével. Természetesen igen, de csak akkor, ha tudjuk, hogy a termék replikálható. Konkrét helyzetben ezt azonban csak akkor tudjuk megtenni, ha megadtuk a replikáló súlyokat, vagyis a λ konstanst is, és akkor a $\mathbf{Q}$ mértékre már nincsen szükségünk.

[39] És tegyük hozzá, hogy a számtalan gyorstalpaló kurzus nem is megy tovább.

[40] Nem arról van szó, hogy ezt nem tudta talán mindenki. Arról van szó, hogy nem hangsúlyozták. Folytonos időhorizont esetén pedig az analóg Wiener-folyamatot főleg statisztikai és nem elvi okokból támadták. A hozamok nem normalitása körüli irodalom mint tapasztalati tényt veti el az egyszerű és elegáns modellt, és nem azért, mert triviális módon becsempészi a teljességet.

után nem lehet csodálkozni azon, hogy az átlag kereskedő, amennyiben módjában áll, igen kockázatos derivatív üzleteket köt. Nyilván, hiszen az ő személyes jövedelmezősége valójában egy ingyenes opció. Ha bejön a dolog, akkor komoly prémium üti a markát, ha nem, hát nem volt szerencséje, és maximum egy másik helyen tesz kísérletet arra, hogy tudását kamatoztassa.

Hasznossági függvény és martingálmérték

Mielőtt tovább lépnénk, érdemes egy kitérőt tenni, és megvizsgálni, hogy mi történik, ha a piac nem teljes (*Delbaen–Schachermayer* [2006]). Természetesen ilyenkor is létezik martingálmérték, de a martingálmérték nem egyértelmű. Milyen kapcsolat van ilyenkor a martingálmérték és az árak, illetve a piaci szereplők hasznossági függvénye között? Másképpen: ha a piac nem teljes, akkor vissza kell térni a hagyományos egyensúlyelméleti megközelítéshez.

Hogyan kapcsolható össze a matematikai pénzügyek árazási modellje a mikroökonómia árazási modelljével? Miként a következőkben megmutatjuk, egyensúlyi állapotban a helyettesítési határráták éppen a mértékcsere során létrejött kockázatsemleges valószínűségi arányokkal írhatók le. A technikai bonyodalmak elkerülése céljából tegyük fel, hogy az időparaméter diszkrét, és az eseménytér végesen generált, vagy ami ugyanaz: az S eszközárfolyam valamilyen fával írható le. A fának nem kell feltétlenül szabályosnak lennie, vagyis nem kell feltenni, hogy az egyes elágazások száma azonos legyen az eszközök számával. Például a hagyományos kötvény–részvény modell esetén a fa lehet három vagy akár száz elágazású is. Legyen u valamilyen befektető hasznossági függvénye. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az u deriválható, konkáv, szigorúan monoton nő, és a teljes számegyenesen értelmezett. A befektető haszonmaximalizációs problémája a következő:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[u\left(f\right)\right] \to \max,$$

$$f = w_0 + \sum_{t=1}^{T} \Delta S\left(t\right)\theta\left(t\right).$$

Vagyis a feladat az, hogy adott w_0 kezdőkészletből kiindulva és T időszakon keresztül kereskedve az S-sel átlagban mennyi hasznosságot tudunk a T-edik időszak végére maximum elérni. Természetesen az átlagot a statisztikai, vagyis az „objektív” valószínűség mellett kell venni. Első lépésként belátjuk, hogy ez a maximumprobléma ekvivalens a

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[u\left(f\right)\right] \to \max,$$

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(f\right) \leq w_0, \mathbf{Q} \in \mathbb{M},$$

problémával, ahol $\mathbb{M} \doteq \mathbb{M}$ (S) jelöli az S martingálmértékeinek halmazát. Hangsúlyozni kell, hogy $\mathbb{M}$ a martingálmértékek, és nem az ekvivalens martingálmértékek halmazát jelöli. Ha $\mathbb{P}$ jelöli a **P**-vel ekvivalens mértékek halmazát, akkor az ekvivalens martingálmértékek halmaza $\mathbb{M} \cap \mathbb{P}$. A feladat ismét könnyen értelmezhető. Ha a diszkonttényező azonosan egy, akkor a $\mathbf{Q} \in \mathbb{M}$ mértékek a lehetséges árvektorok halmazával azonosíthatók, ugyanis ilyenkor a **Q** (A) éppen a χ_A alakú T-edik időszaki kifizetés ára. Világos, hogy az ilyen jószágok árának ismerete alapján az összes f kifizetés ára is megadható, és a kifizetés ára éppen $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$ (f) lesz.

A feladat szerint meg kell keresni a maximális várható hasznosságot biztosító azon f fogyasztást, amelyre az összes lehetséges, számba jöhető árvektor mellett a költségvetési korlát teljesülni fog. Érdemes azonban ezen a ponton egy további megjegyzést tenni. Természetesen a **Q** (A) csak akkor tekinthető árnak, ha a T-edik időszaki χ_A kifizetés fedezhető. Mivel ezt implicite minden A esemény esetén elvárjuk, ezért a **Q** (A) árként való értelmezésével hallgatólagosan feltételezzük, hogy a piac teljes, így a feladat értelmezése némi csúsztatást tartalmaz. Vegyük észre, hogy semmilyen, a matematikai közgazdaságtanban szokatlan probléma nem merül fel. Mind a két feladat egy konkáv hasznossági függvény maximalizálása egy poliedrikus halmaz felett. A két feladat között az a különbség, hogy az első a feltételi halmazt a halmaz elemeivel, a második a feltételi halmazt a határoló félterek metszeteként írja le.[41]

Az arbitrázsmentesség feltétele szerint a

$$K \doteq \left\{ f \mid f = \sum_{t=1}^{T} \Delta S(t)\theta(t) \right\}$$

altér csak az origóban metszi a nem negatív vektorok P halmazát. Miként az előző pontban, C legyen a K-ból a díjmentes lomtalanítás feltételével kapható kifizetések halmaza. Mivel a feltevés szerint a valószínűségi modell véges sok kimenetet tartalmaz, ezért a P egy véges dimenziós tér nem negatív vektorainak halmaza, így egy véges kúp. A K egy lineáris altér, ezért a C és a K halmazok véges kúpok, így a K és C zárt halmazt alkotnak.[42] Nyilvánvaló, hogy a $K \cap P = \{0\}$ és a $C \cap P = \{0\}$ feltételek ekvivalensek. Az arbitrázsmentesség duális formában való megfogalmazását adja a következő tétel.

5. TÉTEL (AZ ESZKÖZÁRAZÁS ALAPTÉTELE). *Valamely S eszközök által definiált piacon pontosan akkor nem létezik arbitrázs, ha az S rendelkezik ekvivalens martingálmértékkel.*[43]

BIZONYÍTÁS. Az itt bemutatott bizonyítás a lehetséges bizonyítások közül talán a legegyszerűbb, és a véges kúpok közismert elméletére támaszkodik. Amennyiben az olvasót a matematikai bizonyítás nem érdekli, azt nyugodtan elhagyhatja. A bizonyítás egyedül érdekes része az, hogy standard elsőéves lineáris algebrára épül. A tétel általánosításai azonban a modern funkcionálanalízis kifejezetten nehéz részeit használják. A nehézségek oka azonban az időhorizont „szerencsétlen" voltából ered. A bizonyításra rátérve, valamely V véges kúp esetén a szokásos módon jelölje V^p a V negatív polárisát, vagyis

$$V^p \doteq \{u \mid (u,v) \leq 0, \text{ ha } v \in V\}.$$

Az arbitrázsmentesség feltétele szerint $C \cap P = \{0\}$. Ha E jelöli az összes vektor, valószínűségi változó halmazát, akkor

$$E = \{0\}^p = (C \cap P)^p = C^p + P^p \doteq C^p - P,$$

ugyanis $P^p = -P$. Mivel $0 \in P$, ezért a C^p triviálisan tartalmaz egy M pozitív elemet. Megmutatjuk, hogy normalizálás után az M egy ekvivalens martingálmérték. Pontosabban megmutatjuk, hogy a C^p minden nem nulla eleme normalizálás után egy martingálmértéket definiál, és fordítva, a martingálmértékek mindegyike eleme a C^p kúpnak. Ez utóbbi indoklása egyszerű. Ha **Q** egy martingálmérték és

$$f \doteq k - z \doteq \sum_{t=1}^{T} \Delta S(t)\theta(t) - z \in C$$

[41] A két feltételi halmaz nem azonos. Miként látni fogjuk, a második feltételi halmaza a C, az elsőé pedig definíció szerint a K. Mivel az u monoton nő, a C halmazon való maximalizálás ekvivalens a K halmazon való maximalizálással.

[42] Megjegyezzük, hogy ezen a ponton erősen kihasználtuk a valószínűségi mező szerkezetére tett egyszerűsítő feltételeket. Az általános eset tárgyalásának nehézségei éppen a most tett észrevétel általában nem triviális voltából ered.

[43] Vegyük észre, hogy a Dalang–Morton–Willinger-tételt igazoljuk egy speciális esetben.

tetszőleges, akkor a szokásos módon eljárva, felhasználva, hogy diszkrét időhorizonton az integrálható martingáltranszformációk valódi martingálok

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(f) \doteq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T}\Delta S(t)\theta(t)-z\right) \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T}\Delta S(t)\theta(t)\right)=0,$$

így $\mathbf{Q} \in C^p$. Megfordítva, ha $\mathbf{Q} \in C^p$, akkor a $\mathbf{Q}$ mértéket megadó vektor nyilván merőleges a K altérre. Mivel $-P \subseteq C$, ezért $\mathbf{Q} \geq 0$. Ha $\mathbf{Q} \neq 0$, akkor a $\mathbf{Q}$ normalizálás után tekinthető valószínűségi mértéknek. Nyilván minden $F \in \mathcal{F}_{t-1}$ esetén a $\chi_F\, [S(t) - S(t-1)] \in K$, ezért

$$\int_F S(t)-S(t-1)\,d\mathbf{Q}=0,$$

amiből a feltételes várható érték definíciója miatt $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\,[S(t) \mid \mathcal{F}_{t-1}] = S(t-1)$, vagyis az S valóban martingál a $\mathbf{Q}$ alatt.

A bizonyításból azonnal látszik a következmény.

KÖVETKEZMÉNY. *Ha nincsen arbitrázs, akkor* con $(\mathbb{M}) = C^p$. *Ilyenkor az ekvivalens martingálmértékek* $\mathbb{M} \cap \mathbb{P}$ *halmaza a* C^p *és az egységszimplex metszetének azon elemei, amelyek nem esnek a nem negatív vektorok kúpjának határára. Nyilvánvalóan mivel* $\mathbb{M} \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$, *ezért* $\mathbb{M} = \mathrm{cl}(\mathbb{M} \cap \mathbb{P})$.

A két feladat azonossága az előző dualitási tétel egyszerű következménye.

6. TÉTEL. *Az előző két feladat ekvivalens.*

BIZONYÍTÁS. A második feladat lehetséges megoldásainak halmaza éppen az

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(f - w_0) \leq 0, \qquad \mathbf{Q} \in \mathbb{M}$$

halmaz. Nyilvánvalóan ez ekvivalens a

$$(\mathbf{Q}, f - w_0) \leq 0, \qquad \mathbf{Q} \in \mathrm{con}\, \mathbb{M}$$

feltétellel. Mivel az előző következmény miatt con $(\mathbb{M}) = C^p$, ezért $f - w_0 \in C^{pp}$. Mivel a C zárt konvex kúp, ezért $C^{pp} = C$, így $f - w_0 \in C$, vagy ami ugyanaz, $f \in w_0 + C$. Mivel definíció szerint $C \doteq K - P$, ezért a második feladat lehetséges megoldásainak halmaza bővebb, mint az első, így mivel a célfüggvények megegyeznek, ezért az első feladat optimális megoldásainak halmaza nem lehet nagyobb, mint a másodiké. Tegyük fel, hogy az $\hat{f}$ vektor a második probléma optimális megoldása. Ekkor

$$\hat{f} = \hat{f} - w_0 + w_0 = c + w_0 = k - z + w_0$$

alakú, ahol $k \in K$, és $z \leq 0$: Mivel a feltételek szerint az u monoton nő, ezért

$$u(w_0 + k) \geq u(\hat{f}),$$

amiből következik, hogy a második feladat maximumértékénél nem kisebb az első feladat maximumértéke, így a két feladat optimális értéke megegyezik. Mivel az első feladat lehetséges megoldásai egyúttal a második feladatnak is lehetséges megoldásai, ezért az első feladat minden optimális megoldása optimális megoldása a második feladatnak is. Ha $w_0 + k \neq \hat{f}$, de $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[u(w_0+k)\right] = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[u(\hat{f})\right]$, akkor az u szigorú konkavitása miatt tetszőleges konvex kombináció esetén a célfüggvény értéke nagyobb, mint a végpontokban a célfüggvény értéke, ami ellentmond az $\hat{f}$ optimalitásának. Hasonlóan látható be, hogy a két feladatnak egyszerre nincsen optimális megoldása.

A haszonmaximalizációs feladat megoldását a Lagrange-multiplikátor módszer segítségével szeretnénk megadni (*Delbaen–Schachermayer* [2006]). A feladat második megfogalmazása majdnem alkalmas a módszer alkalmazására, az egyetlen gond, hogy a feltételi halmazt definiáló egyenlőtlenségek száma végtelen. A Lagrange-multiplikátor módszerének a használatához vegyük észre, hogy az $\mathbb{M}$ éppen a C^p kúp és az egységszimplex metszete. Mivel a C egy véges kúp, ezért a C^p polárisa is egy véges kúp, így az $\mathbb{M}$ egy korlátos poliéder, így az $\mathbb{M}$ az extremális pontjainak konvex kombinációja. Világos, hogy a második feladatban elegendő ezekre az extremális pontokra megkövetelni az egyenlőtlenség teljesülését. Jelölje tehát $\{\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_M\}$ az $\mathbb{M}$ extremális pontjainak halmazát. Jelöljük az egyes kimenetelek $\mathbf{P}$ szerinti valószínűségeit p_n-nel, a fenti $\{\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_M\}$ halmaz egy $\mathbf{Q}_m$ vektorának elemeit pedig q_n^m-nel. Ekkor a második maximumprobléma Lagrange-függvénye

$$L(f_1, \quad f_N, \eta_1, \quad \eta_M) = \sum_{n=1}^{N} p_n u(f_n) - \sum_{m=1}^{M} \eta_m \left(\sum_{n=1}^{N} q_n^m f_n - w_0 \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} p_n \left(u(f_n) - \sum_{m=1}^{M} \frac{\eta_m q_n^m f_n}{p_n} \right) + \sum_{m=1}^{M} \eta_m w_0.$$

Vegyük észre, hogy mivel a feltételek lineárisak, a célfüggvényhez tartozó szorzó választható nullától különbözőnek, és mivel a célfüggvény konkáv, ezért a feltételekhez tartozó együtthatókat negatívnak választottuk. Mivel a feltételi halmazok egyenlőtlenségek, ezért $\eta_m \geq 0$. Írjuk fel a feladatra a Kuhn–Tucker-feltételeket! A Lagrange-multiplikátor módszere szerint alkalmas multiplikátorok esetén az L feltétel nélküli maximuma éppen megegyezik az eredeti függvény feltételes maximumával. A Lagrange-függvény stacionárius pontját felírva, felhasználva, hogy az u értelmezési tartománya nyílt, így a stacionárius pontban a derivált nulla

$$\frac{\partial L}{\partial f_n} = p_n \left(u'\left(\hat{f}_n\right) - \sum_{m=1}^{M} \frac{\eta_m q_n^m}{p_n} \right) = 0.$$

Mivel a feltétel szerint minden n-re $p_n > 0$, ezért

$$u'(f_n) = \sum_{m=1}^{M} \frac{\eta_m q_n^m}{p_n}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket! Legyen $y \doteq \eta_1 + ... + \eta_M$. Ha $y = 0$, akkor az összes η_m is nulla. Ilyenkor az optimum szempontjából a feltételek mindegyike irreleváns, vagyis a feltételes optimum megegyezik a globális optimummal. De az u függvényre tett feltételek miatt feltétel nélküli optimum nem létezik, így az $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}$ $[u(f)]$ függvénynek nincsen globális optimuma. Így az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy y > 0. Legyen $\mu_m \doteq \eta_m \backslash y, \mu \doteq (\mu_1, ...\mu_M)$, valamint

$$\mathbf{Q} \doteq \sum_{m=1}^{M} \mu_m Q_m.$$

A definícióból adódik, hogy $\mathbf{Q}$ éppen az extremális pontok egy alkalmas konvex kombinációja, így $\mathbf{Q} \doteq (q_n) \in \mathbb{M}$. Az optimum feltétele tehát

$$u'(f_n) = y \frac{q_n}{p_n}.$$

Vegyük észre, hogy a q_n/p_n hányados éppen a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ Radon–Nikodym-féle derivált értéke az n-edik kimenetben, így Lagrange-függvény stacionárius pontjára vonatkozó feltétel éppen

$$u'\left(\hat{f}\right) = y\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}.$$

Egyensúlyi állapotban a kereslet megegyezik a kínálattal. Ha a keresletet az *u* hasznossági függvény „generálja”, akkor a mértékcsere éppen azt a **Q** mértéket adja, amelyre a Radon–Nikodym-féle derivált arányos a határhasznokkal. Ennek megfelelően nem teljes piacon a hasznossági függvények egyértelműen kijelölik a martingálmértéket. Teljes piacon a hozzárendelés egyértelmű, vagyis ilyenkor a martingálmérték egyértelműen meghatározza az optimális fogyasztói döntést, vagyis a keresletet. Általános esetben azonban a martingálmértékek által hordozott információnak nincs jelentősége az egyensúlyi árakra nézve. Az elmondottak azért lényegesek, mert a szokásos[44] matematikai pénzügyi modellek azt sugallják, hogy a pénzügyi piacokon a származtatott termékek ára megmondható olyan kvázimegfigyelhető adatok alapján, mint a volatilitás vagy a kamatláb. A sokat hangoztatott tudományos áttörés, miszerint a drifttagnak a származtatott termékek árazásában nincsen szerepe, éppen azt jelenti, hogy a kockázati preferenciák nem játszanak ilyenkor szerepet. Még annyira sem, hogy az egyébként megfigyelhető alaptermékі hozamoknak sincsen szerepük a származtatott termék árazása során.[45] Döbbenetes tudományos felfedezés! Hasonlóan mély, mint az anyag kvantumos viselkedése. Nobel-díjat nekik. Az impicit üzenet világos. A derivatív üzletek területén lehet kockázatot vállalni!

A lehetséges portfóliók tisztázatlansága

A matematikai pénzügyi irodalomnak szembeszökő sajátossága a slampossága (*Baxter–Rennie* [2002], *Cochrane* [2001], *Hull* [1997]). Ha összevetjük például az egyensúlyelmélet irodalmával, ahol kötelező a tiszta, precíz és didaktikus matematikai érvelés (*Magill–Quinzii* [1996]), a pénzügyi irodalom stílusa a legrosszabb „fizikusi” megközelítést tartalmazza. Össze-vissza deltáznak, semmit sem definiálnak pontosan, a számolások felett (jó esetben csak) órákat kell ülni ahhoz, hogy a precíz értelmük megvilágosodjon. Nem arról van szó, hogy nincsen az irodalomnak egy olyan szegmense, ahol a kérdések pontosan, matematikailag precízen vannak tárgyalva (*Delbaen–Schachermayer* [2006], *Karatzas–Shreve* [1998], *Shiryaev* [1999]). Ilyen szegmens természetesen van, csak ezt szinte egy fal választja el az irodalom másik felétől. Ennek természetesen egyik oka az, hogy az irodalom hátterét biztosító sztochasztikus analízis egy nagyságrenddel nehezebb elmélet, mint az egyensúlyelmélet hátterét adó véges dimenziós konvex halmazok elmélete. A precíz bizonyítások hosszúak, és igen körülményesek, tele vannak mértékelméleti bonyodalmakkal, amelyek közgazdasági tartalmáról még jóindulattal sem lehet beszélni.

Ez valószínűleg része a magyarázatnak, de sajnos nem biztos, hogy csak erről van szó. Az irodalom tele van a sztochasztikus analízisben járatos kutatók számára is követhetetlen vagy csak nagyon nehezen követhető számolásokkal. Sőt a fordított állítás is igaz. Ha valaki eligazodik a matematikai háttérben, még nehezebben tudja követni a megfontoláso-

[44] Nem állítom, hogy az irodalomban ezt a kérdést nem vetették fel, sőt. Annak ellenére, hogy ezzel mindenki tisztában volt, szerepét jóval kevésbé hangsúlyozták, mint a kockázatsemleges árazás igencsak félrevezető és félremagyarázható elvét. *Karatzas–Shreve* [1998] ezeket a kérdéseket az ötszáz oldalas könyvük utolsó 200 oldalán tárgyalták részletesen. A legtöbb olvasó azonban csak az első 50 oldalt olvassa el, ahol nagyrészt a Wiener-folyamat és a Girszanov-tétel rejtelmei szerepelnek. Ebben a megközelítésben a Radon–Nikodym-féle deriváltat az igencsak misztikus Girszanov-transzformációval mint valamifajta matematikai csodaként tárgyalják.

[45] Tegyük fel, hogy két alaptermék közül az egyik kétszer olyan gyorsan nő átlagban, mint a másik. Ennek ellenére a vételi opciójuk ára azonos, feltéve, hogy a volatilitásuk azonos.

kat. Miközben a közgazdaságtan ellen felhozott egyik érv, hogy túlságosan matematikai és axiomatikus a megközelítése, ahol lényegtelen nüánszok is explicite axiómaként megfogalmazásra kerülnek, a származtatott termékekkel kapcsolatos irodalomban nem divat precíznek, világosnak és didaktikusnak lenni. Miközben a modern matematika legnehezebb fejezeteit használjuk, mindenki úgy tesz, mintha csak egyszerű számolgatásokról lenne szó.

A problémák illusztrálására vegyük például a nevezetes Black–Scholes-formulát! Miként közismert, a formula eredeti levezetése meglehetősen heurisztikus (*Hull* [1997]), ami önmagában nem probléma, sőt. Az elméletet tisztázó matematikusok a formula egy másik levezetését javasolták, amely a martingálelmélet keretében próbálta igazolni az elméletet. Annak a martingálelméletnek a keretében, amely éppen akkor került ki a francia matematikai iskola műhelyéből. A legtöbb képzett matematikus is alig tudott többet a martingálokról, mint hogy azok valamiféle lószerszámok. Ma ezt a megközelítést tárgyalja a legtöbb szerző. Naivan azt gondolnánk, hogy ha már egy ilyen modern matematikai módszertant használunk, akkor a formulát igazolni is tudjuk.[46] Megítélésem szerint a válasz az, hogy nem. A formula bizonyítása sokkal ingatagabb talajon áll, mint azt sokan feltételezik.

A Black–Scholes-modellel kapcsolatban van egy bökkenő: ha ügyetlenül definiáljuk a megengedett portfóliókat, akkor a modell mindenképpen tartalmaz arbitrázst. Ennek oka igen egyszerű: mivel az időhorizont végtelen sok időpontot tartalmaz, valamiféle duplázási stratégiával mindig lehet semmiből valamit csinálni. Bár az időhorizont korlátos, a lehetséges időpontok száma végtelen, ezért a pozíció nagyságát mindig lehet addig növelni, amíg a végén a kívánt pozitív mennyiségű eredményt 1 valószínűséggel ki lehet sajtolni. A pontos megfogalmazást az úgynevezett Dudley-féle integrálreprezentációs tétel tartalmazza (*Oksendal* [1998]), amely azt állítja, hogy tetszőleges, így minden pozitív, valószínűségi változó előállítható alkalmas önfinanszírozó portfólió segítségével. A lényeg persze az alkalmas szóban van. Mivel az arbitrázsjelenséget ki akarjuk zárni, valamilyen megkötést kell tenni, vagyis csak speciális portfóliósúlyokat szabad megengedni. Ezen a ponton azonban az irodalom zavarban van.

A „jobb” szerzők felteszik, hogy a replikáló portfóliónak alulról korlátosnak kell lennie, a „ravaszabb” szerzők felteszik, hogy a stratégiáknak négyzetesen integrálhatónak kell lenniük a kockázatsemleges mérték alatt, a „lusta” szerzők pedig mind a két társaság tételeit idézik, és egyidejűleg felhasználják, vagy az egész kérdést ignorálják, és a deltázással összekutyulva kábítják a naiv olvasót. Ha el is tekintünk a harmadik csoporttól, a kérdés nem lényegtelen. A második megközelítés nyilvánvalóan problémás. Közgazdaságtanilag értelmezhetetlen, bár matematikailag igen kényelmes.

Az első megközelítés közgazdaságilag jobban interpretálható: lényegében az általános egyensúlyelméletben szereplő költségfedezeti feltétellel azonos. Az alulról való korlátosság megkövetelésének azonban van egy súlyos matematikai következménye. A megengedett portfóliók halmaza nem egy altér, hanem egy kúp. Abból, hogy egy portfólió megengedett, nem következik, hogy az ellentettje is megengedett, ugyanis abból, hogy egy portfólió alulról korlátos, nem következik hogy felülről is korlátos. Tegyük fel, hogy egy követelést sikerült lefedezni. Azt, hogy a lefedezéshez szükséges portfólió induló költsége éppen a termék ára, arbitrázsérveléssel szokás indokolni. Az érvelés szerint, ha a fedező portfólió induló költsége eltérne az ártól, akkor a portfóliót megvéve vagy eladva, illetve a fordított irányú tranzakciót a származtatott termék esetében is végrehajtva, pozitív nyereséget kapunk. Ez éppen az említett ketchupelv. Ez azonban most nem érvényes, mert a replikáló portfóliót vagy eladhatjuk, vagy megvehetjük, de egyszerre a kettőt nem tudjuk

[46] Természetesen az úgynevezett Black–Scholes-modell keretei között, vagyis amikor az alapvető paraméterek, μ, r és σ konstansok stb.

megtenni, ugyanis nem tudjuk garantálni, hogy a fedező portfólió mind a két irányban korlátos legyen. Akkor végül is mi a termék ára? Egy matematikai huszárvágással kivághatjuk magunkat, és mondhatjuk, hogy az ár a lehetséges fedező konstansok közül a legkisebb, ugyanis az eladó mindig fedezve akar lenni, a vevő meg minél olcsóbban akar a termékhez hozzájutni. Így, definíció szerint, árként megkapjuk a diszkontált kifizetések kockázatsemleges mérték melletti átlagát. Vegyük azonban észre, hogy ilyenkor explicit módon feltettük, hogy az eladók nem hajlandók kockázatot vállalni, hiszen csak fedezett portfóliókról hajlandók „tárgyalni". Vagyis miközben azt mondjuk, hogy a derivatív árazás elméletében nem szükséges a preferenciákról nyilatkozni, explicit módon előírjuk az eladók preferenciáját. És mi van a vevők preferenciájával?

Az ő oldalukon az arbitrázsérvelés nem érvényes, és ezért a preferenciájukról nyilatkozni kell (*Delbaen–Schachermayer* [2006], *Oksendal* [1998], *Karatzas–Shreve* [1998]). Nem arról van szó – mint ahogyan sokan hiszik –, hogy bármilyenek is a preferenciák, ha elfogadjuk, hogy a pozitív pénz az jó, akkor az ár egyértelműen adott. Mivel az egyik oldal számára az arbitrálás a modell feltételei mellett nem adott, ezért az érvelés szó szoros értelemben sánta. Sánta, mint Doktor House.

De miért is kell ez az egész bonyodalom a sánta portfóliókkal? Hát az időhorizont miatt. Az időhorizont miatt, amely a modellt nem triviálissá teszi. Diszkrét időhorizonton a modell triviális, és az arbitrázsérvelés működik. Folytonos időhorizonton a modell igen bonyolult, és az arbitrázsérvelés nem működik. Persze bárki mondhatja, hogy a valóságban a vevők és az eladók lehetőségei azonosak. Ez így van. De ez a modellben nem így van. Egy tudományos elméletben sok mindent lehet csinálni. Egy dolgot nem. Felírunk egy bonyolult matematikai modellt, ebben felhasználjuk az utolsó húsz év legbonyolultabb matematikai konstrukcióit, és amikor a precíz érvelés kezd kínossá válni, akkor vagy a valóságra hivatkozunk, vagy egy kényelmes matematikai feltétellel elhessegetjük a problémát.

Véleményem szerint a Black–Scholes-formula[47] általános és elegáns körülmények közötti levezetése nem megoldott és nem meggyőző. Ha valóban precízek akarunk lenni, és a minimálisan elvárható módon nem akarunk rejtett, abszurd feltételeket a modellben alkalmazni, akkor az árat mint a minimális költségű, szuperreplikáló portfólió árát kell definiálni. A jobb könyvek ezt így is teszik. De a nép egyszerű fia a legtöbb egyetemen azt tanulja, hogy az ár az arbitrázs kizárásának következménye, és éppen olyan tény, mint a gravitáció. Nem definíció szerint igaz, hanem természeti-gazdasági erők következménye. Így van, mert így kell lennie, és nem így van, mert így definiáltuk. Nem ugyanaz a kettő. Mondhatja valaki, hogy miért érdekes a Black–Scholes-formula? Nincsen ez a csont már túlrágva? Természetesen igen, de az összes többi pénzügyi matematikai modell ennek a formulának az általánosítása, így automatikusan megörökli a problémáit.

Ha a formula csak definíció szerint igaz, akkor miért várjuk, hogy a formulának bármi relevanciája legyen? A válasz szerintem egyszerű, azért mert a diszkrét és véges időhorizonton az arbitrázs-gondolatmenet tökéletesen és hibátlanul működik. Tökéletesen indokolható például a kockázatsemleges árazás elve stb. A matematikai érvelés mellett felhozott gyakori érv, hogy precíz és mentes a verbális érvelés azon közismert hibájától, hogy minden lépésben csak egy kicsit torzítva az előző állítást, végül mindent be lehet „bizonyítani". A Black–Scholes-formula „igazolása" sajnálatos módon ennek egy tipikus esete. A diszkrét és véges időhorizont meggyőző érvelését némi csúsztatással és pongyola tárgyalással átvisszük folytonos időhorizontra. Majd ezt követően az eredményt elkezdjük általánosítani. Az általánosítás során a matematikai részletkérdéseket a szőnyeg alá söpörjük. Mi lesz ebből?

[47] A Black–Scholes-formula csak annyiból játszik szerepet, hogy már mindjárt az elején szerintem baj van. Mi lehet akkor a történet végén, amikor már mindenki elismeri, hogy egy kukkot sem ért az egészből?

Záró megjegyzések

A matematika a különböző tudományos elméletek szempontjából a végső bíró. Minden tudományos elméletnek tényeken kell alapulnia, és a nagy és központi elméleteket a matematikusok a végsőkig kielemzik, majd ráütik a pecsétet. Bár vannak tények, de a tényeket logikus, követhető és transzparens módon kell az elméletbe beépíteni. Nem minden elmélet elég mutatós és fontos ahhoz,[48] hogy matematikai elemzés tárgyává váljon. Ha egy közgazdasági vagy bármely más tudományos elméletnek van komoly matematikai párja, az az elméletnek rangot ad. Nem kétséges, hogy a közgazdasági gondolatok közül a tudományos világ érdeklődését leginkább a pénzügyi matematika keltette fel. Ennek egyik oka, hogy az elmélet ígérete szerint csak megfigyelhető adatokra fog támaszkodni, tehát olyan misztikus elemeket, mint például a hasznossági függvény, nem fog az elméletben felhasználni. Az érdeklődés másik oka az elmélet alapjául szolgáló csodálatos matematikai háttér. A matematika, ha elismerik ezt, ha nem, komoly bajban van. Ennek első számú oka az alkalmazások hiánya. Nem véletlen, hogy a matematikustársadalom rendkívüli erőkkel vetette bele magát a pénzügyi kutatásokba. Nem pusztán a lehetséges rövid távú profit ígérete mozgatta a világ vezető kutatóit. Sokkal többről van szó. Az inspiráció iránti vágy, amelyre a matematika igencsak rá van és rá volt szorulva. Nem kétséges, hogy rendkívüli munkát végeztek a területen dolgozó kutatók. Közgazdászok, matematikusok, fizikusok, statisztikusok és számos más területen dolgozó tudósok. Ma sokkal jobban látjuk és értjük a pénzügyi folyamatokat, mint korábban láttuk és értettük őket. Sorolhatnánk a statisztikai kutatásokat, a ma már mindenki számára triviális stilizált tényeket, amelyekről néhány éve legfeljebb egy maroknyi kutató pusmogott, vagy idézhetnénk az arbitrázsárazás gondolatát.

A származtatott termékek irodalmának legfőbb problémája, hogy a hasznossági függvény fogalmát a teljes piac fogalmára cserélte. Hangsúlyozni kell, hogy végső soron a derivatív árazás elmélete egy egyszerű lineáris egyenletrendszer megoldására redukálható.[49] A marxi értékelmélet egyik legfőbb problémája igen emlékeztet a származtatott termékek árazási problémájára. Az elmélet szerint egy termék értékét – és így végső soron az árát – az újraelőállításához szükséges munka mennyisége határozza meg. De mi van az ikertermékek árával? A klasszikus példa a birka gyapja és húsa. A két termék egy termelési folyamat eredményeként állt elő. Miként osztozkodik a két terméken a befektetett munka? A probléma teljesen analóg a nem teljes piacok problémájával, ugyanis a lényegi probléma itt is az, hogy egy olyan egyenletrendszert kell megoldani, amelyben több a változó, mint a feltétel. A lehetséges árak egy hipersíkon vannak, egyfajta költségfedezeti síkban, és ezen sík pontjai között a tényleges keresleti-kínálati viszonyok ismerete nélkül nem lehet választani. A kereslet-kínálat alakulásának egyedüli elmélete pedig az általános egyensúlyelmélet. A matematikai-közgazdasági alkalmazások két zászlóshajója – az általános egyensúlyelmélet és a származtatott termékek árazása – azonban köszönő viszonyban sincsen egymással. Mind az alkalmazott matematikai módszer, mind a tényleges közgazdasági fogalomrendszer lényegében diszjunkt. Ennek egyik oka persze, hogy a pénz realisztikus beépítése az általános egyensúlyelméletbe nem teljesen megoldott.

Egyáltalán nem világos, hogy milyen irányban érdemes mozogni. Miként láttuk, diszkrét állapottér és diszkrét és véges időhorizont esetén az általános egyensúlyelmélet módszertana segítségével a két elmélet valamilyen szinten összehozható, de ezzel kidobjuk a fürdővízzel a babát is, a sztochasztikus kalkulust, amely oly sok kutatót ragadott meg, és

[48] Természetesen lehet ettől még igen hasznos, sőt. Sok nagyon hasznos elmélet van, amely nem matematizálható. Leginkább azért, mert túlzottan bonyolult lenne a matematikai leírás.

[49] Nem feltétlenül véges dimenzióban kell az egyenletrendszert megoldani, lehet, hogy függvénytérben, és az egyenlet lehet, hogy operátorértékű. A matematikai bonyodalmak leginkább attól függnek, hogy mit teszünk fel az időhorizontról.

amely oly sok színvonalas közgazdasági és matematikai kutatás alapja. A másik irányból való integrálás, nevezetesen, hogy az általános egyensúlyelméletet vigyük bele a sztochasztikus kalkulusba, matematikailag lehetetlen feladatnak tűnik. Nem beszélve arról, ha mégis valamilyen szinten sikerülne, olyan bonyolult lenne, hogy azt senki sem értené meg.[50] Miként a bevezetőben jeleztem, sok mindent át kell gondolni. A pénzügyi-matematikai irodalomnak is át kell értelmeznie az alapvető megközelítését. A terület praktikus megközelítési módszerét ötvözni kellene a közgazdaságtan egyéb felismerésével, miközben ügyelni kellene arra, hogy az egyensúlyelmélet megfoghatatlan fogalomrendszerét mégse csempésszük be. Jelenleg a piaci realitások a „kockázat piaci ára" elnevezésű, némiképpen misztikus korrekciós faktorban csapódnak le, és a kérdés arra redukálódik, hogy milyen erők határozzák meg a kockázat piaci árát.

Végül is kinek a felelőssége a pénzügyi válság? Mennyiben játszott szerepet a természettudomány benyomulása/betódulása a pénzügyi intézményekbe? Ennek eldöntésére csak egy gondolatot szeretnék említeni. A válság oka mindenki szerint az volt, hogy a pénzügyi rendszer túl sok kockázatot tartalmazott, vagy ami ugyanaz, túl magas volt a kockázat piaci ára. Thomas Björg méltán népszerű, bár igen pongyola könyvében nagy betűkkel középre szedve ott található, hogy a *kockázat piaci árát a piac határozza* meg.

Hivatkozások

BAXTER, M.–RENNIE, A. [2002]: Pénzügyi kalkulus. Typotex, Budapest.

BJÖRK, T. [1998]: Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford University Press, Oxford.

COCHRANE, J. H. [2001]: Asset Pricing. Princeton University Press, Princeton.

DELBAEN, F.–SCHACHERMAYER, W. [2006]: The Mathematics of Arbitrige. Springer, Berlin.

HANSEN, L. P.–RICHARD, S. F. [1987]: The Role of Conditioning Information in Deducing Testable Restrictions Implied by Dynamic Asset Pricing Models. Econometrica, 55. 587–614. o.

ELLIOTT, R. J. [2005]: Mathematics of Financial Markets. 2. kiadás, Springer, New York.

HULL, J. C. [1997]: Options Futures and Other Derivatives. Prentice Hall, London.

KARATZAS, I.–SHREVE, S. E. [1998]: Methods of Mathematical Finance. Springer, New York.

MAGILL, M.–QUINZII, M. [1996]: Theory of Incomplete Markets. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

[10] MUSIELA, M.–RUTKOWSKI, M. [1997]: Martingale Methods in Financial Modelling. Springer, Berlin.

OKSENDAL, B. [1998]: Stochastic Difierential Equations, Fifth Edition. Springer, Berlin.

[12] ROSS, S. M. [1999]: An Introduction to Mathematical Finance. Cambridge University Press, Cambridge.

SHIRYAEV, A. N. [1999]: Essentials of Stochastic Finance. World Scientific, Szingapúr.

[50] Az eszközárazás alaptételének irodalma jól példázza az esetleges matematikai bonyodalmakat. A tételek bizonyítása hatvan-hetven oldal tömör funkcionálanalízist tartalmaz. Általában a közgazdaságtan kísérleti, tapasztalati alapjai nem elég erősek ahhoz, hogy egy ilyen bonyolult matematikai felépítményt rájuk lehessen építeni.