Közgazdasági Szemle, LVI. évf., 2009. április (297–321. o.)

SIMONOVITS ANDRÁS

# Népességöregedés, tb-nyugdíj és megtakarítás – parametrikus nyugdíjreformok

**Az együttélő korosztályok valóság közeli modelljét vizsgáljuk. A népesség öregszik, mert a születésszám csökken, és a születéskor várható élettartam nő. Az időskori jövedelem egyik forrása a tb-nyugdíjrendszer, másik forrása a megtakarítás és az örökség. Az egymást követő korosztályok tagjai életpálya-hasznossági függvényüket maximalizálva határozzák meg fogyasztási pályájukat. Megtöltve a modellt számokkal, képesek vagyunk különböző nyugdíjstratégiákat összehasonlítani, így a következő modellváltozatokat mutatjuk be: *1.* az alapfutás, *2.* a skálaszorzók csökkentése, *3.* a bérindexálás felváltása árindexálással, *4.* a nyugdíjkorhatár emelése. Attól függően, hogy a résztvevők a változásokat előre látják, vagy sem, reakcióik különböznek.***
**Journal of Economic Literature (JEL) kód: C61, D91, E24, J17.**

Az idő előrehaladtával egyre nő az elméleti és gyakorlati érdeklődés aziránt, hogy miképpen hat a népességöregedés a korosztályok közti újraelosztásra, különös tekintettel a nyugdíjrendszerekre. Ezt a bonyolult folyamatot szeretném másképpen és több szempontból realistábban leírni, mint a hasonló tárgyú legtöbb dolgozat. Modellem következő fontos jellemzőit emeljük ki.

*a)* A népességöregedés exogén, amelyet a csökkenő termékenység és a növekvő várható élettartam okoz. Leírásánál a gyakori két időszak helyett több időszakra bontjuk fel egy nemzedék életpályáját. A jobb áttekinthetőség kedvéért 6, illetve 7 évtizedre osztjuk a felnőtt életkort: a kezdeti stacionárius népesség viszonylag gyorsan fogyó stabil népességbe megy át.

*b)* Az időskori fogyasztást jelentős részben a tb-nyugdíjrendszer fedezi, amelynek járulékkulcsa és skálaszorzója (nyugdíj/szolgálat idő hányados) időben változik.

*c)* Az egy főre jutó teljes bérköltség növekedési üteme exogén és időben állandó.

*d)* A kamattényező és az aggregált bérköltség növekedési tényezőjének hányadosa exogén és állandó.

A vagyondinamika származtatásához további feltevésekre van szükség.

*e)* Az egész korosztályt reprezentáló háztartás fogyasztása és annak hasznossága függ a háztartás méretétől, illetve a korábbi fogyasztás értékétől.

*f)* A háztartásnak különféle (racionális vagy naiv) várakozásai lehetnek a kormányzat nyugdíjpolitikájáról.

* Ez a munka a *Heikki Oksanennel* együtt kezdett közös kutatás elágazása. Hálás vagyok finn munkatársamnak, hogy lehetővé tette e munka külön publikálást. A munka programozási részében *Fazakas István (*egykori tanítványom a Közép-európai Egyetemen) segített, köszönet érte. *Hablicsek László, Kőrösi Gábor, Ruppert László, Szántai Tamás, Vincze János* és egy névtelen lektor értékes megjegyzéseiért szintén itt mondok köszönetet. A kutatást az OTKA K 67853. pályázata támogatta.

*Simonovits András,* MTA Közgazdaságtudományi Intézete, BME Matematikai Intézet és CEU közgazdasági tanszék (e-mail: simonov@econ.core.hu).

A modell viszonylag egyszerű, mert blokkszerkezete *rekurzív*: először önmagában kiszámítható a demográfiai blokk, majd a bér- és nyugdíjblokk, legvégül pedig a fogyasztás- és vagyonblokk. Egyszerűsége miatt a modellnek szinte minden részletét bemutatom, és bárki könnyen reprodukálhatja. Bár számos tényezőtől eltekintek, a kapott eredmények értelmesnek és hasznosnak látszanak.

Szemléltetésként bemutatok néhány numerikus eredményt, de ehhez a bemeneti adatokat is vázolnom kell. A szereplő számok mértékegysége a folyó időszak kezdő bérköltsége. Minden korosztály tízéves korcsoportot alkot, emiatt a számok erősen kerekítettek, karikírozottak. Az 1–2. korosztály kiskorú gyermek, a 3–6. (esetleg a 7.) korosztály a dolgozókból áll, végül a 7. (és a 8.) korosztály a nyugdíjasoké. A demográfiai átmenet során három évtized alatt először az egy asszonyra jutó születések száma 2-ről 1,58-ra esik, majd az élettartam ugrik meg egy évtizeddel.

Minden időszakban a keresetek az életkorral emelkednek, s maximumukat 60 éves korra érik el. A termelékenység évtizedenként $1{,}075^{10} \approx 1{,}19$-szeresére nő, a kamattényező a bértömeg növekedési tényezőjével arányos.

1. Az alapfutásban a kormányzat a demográfiai átmenet ellenére rögzíti a skálaszorzót (évente 2,2 százalékon), a nyugdíjak követik a béreket, és a nyugdíjkorhatár állandó (60 év), emiatt a járulékkulcs meredeken nő: az 1960-es 0,18-ról 0,39-re emelkedik 2020-ban, majd 0,355 körül stabilizálódik. A megfelelő fogyasztási és vagyonpályák drámaian alkalmazkodnak a gyors változásokhoz, például a negyvenéves dolgozónak a mértékegységül választott folyó időszaki kezdő bérköltséghez viszonyított fogyasztása a 2000-beli 0,694-ről 2010-ben 0,657-re csökken.

2. Az első módosításban feltesszük, hogy a kormányzat 2010-ben jelentősen (évi 1,5 százalékra) csökkenti a skálaszorzót, s ezáltal a járulékkulcsok is esnek, záró értéken 0,28-ra. Az újonnan megállapított nyugdíjak is relatíve csökkennek, de a skálaszorzó 32 százalékos csökkenése ellenére csak 23 százalék körüli értékkel.

3. A második módosításban 2010-től kezdve a már megállapított nyugdíjakat bérek helyett árak szerint indexálják. A redukált skálaszorzóhoz hasonlóan, az indexálási váltás is csökkenti a járulékkulcsot: a záró érték (2100-ban) $0{,}338 < 0{,}355$, de növeli a kezdőnyugdíjat, a záró érték $0{,}656 > 0{,}637$.

4. A harmadik módosításban a nyugdíjkorhatár 2010-ben hirtelen 60 évről 70 évre ugrik, s ez jelentősen könnyíti a nyugdíjterheket. A járulékkulcs záró értéke 0,216-ra csökken, a kezdőnyugdíj és általában a fogyasztás is nő.

A három módosítás tükrözi a szükséges igazodást és az egymást követő korosztályok közti teherelosztás változását.

5. Végül racionális várakozások helyett naiv várakozásokat tételezek fel. Csak a skálaszorzó csökkentését vázolom: a meglepetés kiderülte előtt a negyvenéves dolgozó fogyasztása 0,694-ről 0,717-re ugrik, de az ötvenévesé a meglepetés kiderülése után 0,685-ről 0,671-re zuhan.

Az irodalom áttekintését egy táblázattal kezdem, amely a jelen cikkhez hasonló tanulmányok jellemzőit veti össze *(1. táblázat).*

Látjuk fogjuk, hogy a felsorolt öt modell számos dimenzióban hasonlít egymáshoz, de számos dimenzióban különbözik egymástól.

A modellekben közös, hogy a korábban szinte kizárólagos, de még mindig népszerű együttélő nemzedékek *(overlapping generations, OLG)* modellje (vö. *Hairault–Langot* [2008]) helyett részletesen tagolt demográfiai modellen alapulnak, amelyet az *együttélő korosztályok* modelljének nevezhetünk (például *Augusztinovics* [2000]). (Angolul a *generation* szó egyszerre jelent nemzedéket és korosztályt.)

Mivel a 21. századi nyugdíjrendszerek egyik legnyomasztóbb gondja a *népességöregedés*, ezt a legtöbb modell figyelembe veszi. Két dimenzióját kell megkülönböztetni: a

*1. táblázat*
Cikkek és feltevések

| Jellemzők | *Auerbach és szerzőtársai* [1989] | *Bütler* [1997] | *Fehr* [2000] | *Simonovits* [2002] | Jelen cikk |
|---|---|---|---|---|---|
| Csökkenő születésszám | + | – | + | + | + |
| Növekvő várható élettartam | + | – | + | – | + |
| Halálozási kockázat | – | – | – | – | – |
| Családnagyság–fogyasztás | + | ± | – | – | + |
| Korcsoporton belüli különbség | – | – | + | – | – |
| Szokáskövető fogyasztás | – | – | – | + | + |
| Rugalmas munkakínálat | + | + | + | – | – |
| Endogén kamatláb | + | – | + | – | + |
| Hitelkorlát | – | ± | – | – | + |
| Örökség | + | – | – | – | + |
| Adók | + | + | + | – | – |
| Nyugdíjpolitikai meglepetések | – | + | – | – | ± |

± Részben figyelembe vett jellemző.

csökkenő születésszámot és a növekvő várható élettartamot, s ez utóbbi igazán csak a halálozási kockázat figyelembevételével értelmezhető. Mégis számos modell elkerüli a halálozási kockázatot, mert az megsokszorozza a szereplőket: még az azonos évben született egyéneket is 120 osztályba sorolja, aszerint, hogy melyik évben hal meg.

Nyilvánvaló, hogy minél kevesebb gyermeke van egy családnak – egyébként változatlan körülmények között –, annál kisebb lehet a családi fogyasztás (vö. *Blundell és szerzőtársai* [1994] és *Casarosa–Sparato* [2007]). Meglepő módon ezt a szoros összefüggést a *családnagyság és a családi fogyasztás nagysága* között számos nyugdíjmodell figyelmen kívül hagyja (például *Krueger* [2004]). Jelen cikk a családnagyság és a családi fogyasztás közötti kapcsolatot figyelembe veszi.

A népességöregedést vizsgáló modellek jelentős része elhanyagolhatónak véli, de legalábbis elhanyagolja a *korosztályon belüli kereseti különbségeket* (például *Auerbach–Kotlikoff* [1987]). Pedig a különféle nyugdíjreformok szempontjából alapvető a társadalom kereseti és fogyasztási heterogenitása. Például a nyugdíjrendszer feltőkésítése szinte szükségszerűen csökkenti a nyugdíjrendszer degresszív jellegét, újraelosztó szerepét. Sajnálom, hogy én is elhanyagolom ezt a fontos dimenziót.

Ha azt gondoljuk, hogy a dolgozók szabadon döntenek, hogy mennyit dolgoznak, akkor a nyugdíjba vonulás egy speciális döntésnek fogható fel, amikor a munkakínálat 0-ra csökken, főleg a termelékenység csökkenése miatt. Én csak részben osztom a döntés szabadságának feltevését (lásd például *Simonovits* [2002] 12. fejezet), de más kutatók jól-rosszul képesek *endogenizálni a munkakínálatot.* A modellezőket követve, már csak az egyszerűség kedvéért is, teljes foglalkoztatottságot tételezek fel a munkába lépés és a nyugdíjkorhatár között, holott ez nyilván durva leegyszerűsítés (*Spieza* [2002] és *Augusztinovics–Köllő* [2007]).

A neoklasszikus fogyasztási modellek zöme elhanyagolja a növekedési hatásokat, s relatív fogyasztási szintek helyett abszolút szintektől teszi függővé a maximalizálandó életpálya-hasznosság függvényét. *Carroll és szerzőtársai* [2000]-t követve, a termelékenységi szinthez viszonyított fogyasztási szintekkel dolgozom.

*Auerbach–Kotlikoff* [1987] egyik nagy újítása abban állt, hogy egy sok időszakos, minden időszakban sokszereplős modellgazdaság egyensúlyi pályáját az általános egyensúlyelmélet keretén belül oldotta meg. Másképp kifejezve: nem elégedett meg azzal, hogy adott keresetek és kamatlábak mellett a dolgozók optimalizálták életpálya-hasznossági függvényüket, de a tőkefelhalmozás keretén belül összhangba hozták a kamatlábakat és a kereseteket az egyéni döntésekkel. Ez a *racionális várakozási* modell frappáns alkalmazása – más kérdés, hogy ez mennyire írja le helyesen a gazdaságot. (Lehet-e a 2008-ban kipukkant lakásbuborékot racionális várakozások alapján magyarázni? Az együttélő nemzedékek (OLG) racionális várakozáson alapuló modelljének elméleti kritikáját adja *Molnár–Simonovits* [1996].) A felsorolt modellek némelyike követi ezt az iskolát, a jelen modell nem. Megjegyzem, hogy ebben a modellben a keresetek exogén módon változnak, állandó termelékenységi ütem szerint nőnek. A kamatlábat viszont megpróbálom endogén módon ábrázolni, mégpedig úgy, hogy a népességöregedés hatására a kamatláb csökkenjen. Ez összhangban van *Brooks* [2000]-rel és ellentmond *Poterba* [2001]-nek, aki nem látja olyan fenyegetőnek a kamatláb csökkenését, mint én. *Börsch és szerzőtársai* [2001] a fejlett országok fenyegető népességöregedésére a gyógyírt éppen a fejletlenebb országokba irányuló tőkeexportban látják (vö. *Baker–Delong–Krugman* [2005]).

*Hitelkorlátról* beszélünk, ha az egyén nem vehet fel hitelt későbbi keresete terhére (vö. *Hubbard–Judd* [1986] és *Hubbard és szerzőtársai* [1995]). Természetesen lakásra és más tartós fogyasztási cikkre lehet hitelt felvenni, de ezeket a fontos cikkeket a modellünkön kívülinek tekintjük. A hitelkorlát gyakori elhanyagolása miatt nehéz megérteni, hogy miért nem vesz részt minden dolgozó a chilei nyugdíjrendszerben. Megjegyzem, hogy a hitelkorláthoz hasonló hatást fejt ki a fogyasztási pályára az *óvatossági megtakarítás*, amely a bizonytalan későbbi kereseti pálya miatt az egyébként optimálisnál kisebb fogyasztást enged meg (*Kimball* [1990]). Ez utóbbi körülményt már csak a keresetek determinisztikus növekedése miatt szintén elhanyagolom.

Az *örökség* fontos szerepet játszik az egymást követő nemzedékek közti újraelosztásban. Az életciklus-elméletben is alapvető, de vitatott kérdés, hogy a felhalmozott vagyon mekkora része öregkori megtakarítás (*Ando–Modigliani* [1963] szerint kicsi, *Kotlikoff–Summers* [1983] szerint nagy) és mekkora része szándékolt örökség. A jelen modellben nincs halálozási kockázat, ezért nincs szándékolatlan örökség sem.

A modern gazdaság elképzelhetetlen *adók* nélkül. Egy kellően részletezett, valósághű modellben szerepelnie kell legalább a személyi jövedelemadónak és az általános forgalmi adónak. Számos modell eleget tesz ennek a követelménynek, a jelen modell viszont nem.

A modern gazdaság szintén elképzelhetetlen *nyugdíjak* nélkül, sőt jelenleg társadalombiztosítási nyugdíjak nélkül. Még ha tekintélyes közgazdászok meg is akarnak szabadulni tőle, a társadalombiztosítási nyugdíjrendszer lebontását modellezni kell. Többek között ennek hiánya okozta azt, hogy a sokak által túlzottan is visszafogottnak tartott magyar nyugdíjreform 13. évében mind a költségvetési hiány, mind az explicit államadósság elviselhetetlenül nagy.

Híve vagyok a társadalombiztosítási nyugdíjrendszernek, de bevallom, hogy ebben a modellben elsikkad a különbség a társadalombiztosítási és a magánnyugdíj között. Itt nincs bizonytalanság, nincs rövidlátás, nincs működési költség – megannyi gyenge pontja a magánrendszernek.

Ehhez a cikkhez legközelebb természetesen *Oksanen* [2004] és *Beetsma–Oksanen* [2007] áll, amely egy háromnemzedékes modellben elemi eszközökkel kereste a választ a szóban forgó kérdésekre. (Informális áttekintést nyújt magyar nyelven *Oksanen* [2003].) Jelen cikk, akárcsak *Oksanen* [2009], részben az elemi eszközök kiváltására született: *Oksanen* [2009] tört évtizedekkel számolva realistábban ábrázolja a demográfiai szerkezetet, és hozzám hasonlóan figyelembe veszi az örökséget és a dolgozók optimális megtakarítási pályáját. Mivel ő eltekint a keresetek korfüggésétől és időbeli helyettesíthetőségétől, ezért sokkal egyszerűbben tudja kezelni a hitelkorlát problémáit, mint ez a cikk. *Fazakas* [2008] a jelen modell állandósult állapotait elemezte a paraméterértékek széles választékára. A *Simonovits* [2002] könyv több fejezetében is foglalkoztam a cikkben szereplő kérdésekkel: az indexálás megváltoztatásával (13. fejezet), a társadalombiztosítási rendszer privatizálásával (15. fejezet), de ott megelégedtem a stabil népességekkel.

A cikk szerkezete a következő. A makromodell vázának ismertetését követően bemutatjuk az optimális fogyasztási pályát, amelynek segítségével meghatározható a vagyondinamika. Miután ismertetjük numerikus eredményeinket, levonjuk a következtetéseket. A *Függelék* a bonyolultabb bizonyításokat és a táblázatokat tartalmazza.

## A makromodell

A bemutatást a demográfiai blokkal kezdjük, és a bér-, illetve nyugdíjblokkal folytatjuk, ezáltal eljutva a makromodellhez. Mint a bevezetésben már utaltunk rá, a modell *blokkrekurzív*: először önmagában kiszámítható a demográfia, majd a bér- és nyugdíjblokk, legvégül pedig a fogyasztás és vagyon.

### *A demográfiai blokk*

A demográfiai blokk elég egyszerű (mert feltevés szerint egy adott korosztály minden szereplője azonos életkorban hal meg), de negyedszázadok helyett évtizedekkel vagy akár évekkel dolgozik, és figyelembe veszi a csökkenő termékenységet és a növekvő várható élettartamot.

Legyen $t$ a naptári időszak indexe, $t = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, de …, 1940, 1950, 1960, … is! A következő jelölési elvhez ragaszkodunk: amikor egy mennyiség az életkortól és a naptári időtől függ, akkor az első index az életkorra, a második pedig a naptári időre vonatkozik. Jelölje az $i$ korúak számát a $t$-edik időszakban $n_{i,t}$.

Az időben változó, születéskor várható élettartam esetében különbséget kell tennünk az úgynevezett időszakos élettartam (jele: $I_t$) és a korosztályi élettartam (jele: $\mathbf{I}_t$) között. Az előbbi a $t$-edik időszakban *meghaltak* átlagos életkorát jelzi, az utóbbi pedig a $t$-edik időszakban *születettek* átlagos halálozási életkorát jelzi. Bár neve az utóbbira utal, a statisztikában alkalmazott fogalom az előbbit jelenti, természetesen átlagolva a valóságban eltérő halálozási korokat. Egyszerűsítő feltevésünk miatt (azaz mindenki azonos életkorban hal meg) a két fogalom közt modellünkben egyszerű összefüggés áll: $\mathbf{I}_{t-I_t} = I_t$. Például ha 2050-ben a születéskor várható életkor 80 év, akkor $\mathbf{I}_{1970} = I_{2050} = 80$. $\mathbf{I}_t$ a hosszmetszeti, egyéni szinten (életpálya-egyenlegekben) jelenik meg, míg $I_t$ a keresztmetszeti, makroösszefüggésekben (keresztmetszeti egyenlegekben) szerepel.

Ahhoz, hogy megszabaduljunk a kétnemű világ bonyodalmaitól, félháztartásokkal dolgozunk, de félreértés veszélye nélkül a továbbiakban a *fél* jelzőt elhagyjuk. Feltesszük, hogy ha a szülő a $t$-edik időszakban született, akkor az összes gyermeke a $t + H$-adik időszakban születik (ikrek), számuk $2f_{t+H}$. Ebből $f_{t+H}$ marad vele, $f_{t+H}$ pedig a partnernél. (Már itt jelentkezik a reprezentatív egyénekkel dolgozó modellek egyoldalúsága: ahelyett, hogy nulla-, egy-, kétgyermekes stb. családokkal dolgoznánk, mesterségesen feltesszük, hogy például 2000-ben minden anya 2 × 0,79 = 1,58 gyereket szül.) A gyermek $L$ idős koráig a szülőjénél marad, aztán dolgozni kezd, itt is $L$ pozitív egész. (Korunk valóságában mind $H$, mind $L$ növekszik, ettől azonban az egyszerűség kedvéért eltekintünk.) A $t$-edik időszakban született személyek $\mathbf{J}_t$ korukban mennek nyugdíjba, ahol $\mathbf{J}_t$ időben változó pozitív egész szám. A $t$-ben nyugdíjazottak $J_t$ korúak, így a $t - J_t$-ben születtek. Ismét fennáll egy egyszerű azonosság a két mutató közt: $\mathbf{J}_{t-J_t} = J_t$. Feltesszük, hogy csak dolgozók nevelnek gyermeket: $L < H < \mathbf{J}_t - L$.

Összegezve, egy $t$-edik időszakban született személy a $t + L$-edik időszakban elkezd dolgozni, a $t + H$-adik időszakban $f_{t+H}$ számú gyereket „szül/nemz”, $t + H + L$-ben megválik gyermekeitől, $t + \mathbf{J}_t$-ben nyugdíjba megy, $t + \mathbf{I}_t$-ben meghal.

A következő demográfiai egyenletek érvényesek $t \geq 0$-ra:

$$n_{i,t} = \begin{cases} f_t n_{H,t}, & \text{ha } i = 0; \\ n_{i-1,t-1}, & \text{ha } i = 1, \ldots, \mathbf{I}_t; \\ 0, & \text{ha } i > \mathbf{I}_t. \end{cases}$$

Feltesszük, hogy a demográfiai átmenet elején a születési számok kezdeti értéke: $n_{0,-I_0}$, $n_{0,-I_0+1}, \ldots, n_{0,-1}$ adott.

Jelölje $N_t = \sum_{i=0}^{I_t} n_{i,t}$ a $t$-edik időszak népességszámát, ekkor a népesség növekedési tényezője

$$v_t = \frac{N_t}{N_{t-1}}.$$

Stabil népesség esetén $f_t = f$, $\mathbf{I}_t = \mathbf{I}$, azaz $\nu = f^{1/H}$.

## *A bérblokk*

Legyen $w_{i,t}$ a háztartásfő *teljes bérköltsége* $i$ idős korában, a $t$-edik naptári időszakban. Feltesszük, hogy az idő múlásával a kereset–életkor-függvény beszorzódik az időben változatlan $g > 1$ *termelékenységnövekedési tényezővel*:

$$w_{i,t} = w_{i,L}\, g^{t-L} = w_i\, g^{t-L}, \qquad i = L + 1, L + 2, \ldots, \mathbf{J}_t \qquad \text{és} \qquad t = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$$

ahol $w_i$ az $i$ korú keresete az $L$-edik időszakban, és $w_{L,L} = w_L = 1$. [Természetesen a valóságban a kereseti struktúra függhet a demográfiai helyzettől, ahogyan *Akihiko* [2006] (35. ábra 143. o.) meggyőzően érvel, de itt ettől is eltekintünk.] Későbbiekben érdemes lesz bevezetni a $w_{i,i+i}$ jelölést $i > \mathbf{J}_t$-re.

Definiáljuk az aggregált teljes bért:

$$W_t = \sum_{i=L}^{J_t} n_{i,t} w_{i,t}.$$

Végül meghatározzuk az *endogén reálkamat-tényezőt* mint egy $\alpha > 1$ állandó és a teljes bértömeg növekedési tényezőjének a szorzatát:

$$R_t = \alpha \frac{W_t}{W_{t-1}}.$$

Természetesen ez az egyenlet a valóság nagyfokú leegyszerűsítése. A dinamikus általános egyensúlyelméletben a kamattényező a makroegyensúlyi feltételekből adódik: vagy racionális várakozást tételezve fel (*Auerbach–Kotlikoff* [1987]), vagy naivat (vö. *Molnár–Simonovits* [1996]). Állandósult állapotban $R = \alpha v g$.

*A nyugdíjblokk*

A nyugdíjblokkunkat a *felosztó-kirovó tb-nyugdíjjal* kezdjük, és az $y_{i,t}$ jövedelmet a $w_{i,t}$ keresetből és a $b_{i,t}$ nyugdíjból magyarázzuk. Már találkoztunk a $t$-ben születettek számára előírt és a $t + \mathbf{J}_t$-ben érvényes $\mathbf{J}_t$ nyugdíjkorhatárral. A következőképpen írhatjuk le a nyugdíjrendszer makrohatását. A $t$-edik időszakban született dolgozó $i$ korában $\tau_{i,t+i}w_{i,t+i}$ járulékot fizet a társadalombiztosítási nyugdíjrendszerbe, $i = L, L + 1, \ldots, \mathbf{J}_t$, illetve $b_{i,t+i}$ nyugdíjat kap onnan, $i = \mathbf{J}_t + 1, \ldots, \mathbf{I}_t$. Jövedelempályája

$$y_{i,t+i} = \begin{cases} (1-\tau_{t+i})w_i g^{t-L+i}, & \text{ha } L \le i \le \mathbf{J}_t; \\ b_{i,t+i}, & \text{ha } \mathbf{J}_t < i \le \mathbf{I}_t. \end{cases}$$

Olyan nyugdíjrendszert tételezünk fel, amelyben a *kezdőnyugdíj* lineáris függvénye a korábbi nettó kereseteknek, és a $\theta_t$ együtthatókat *skálaszorzóknak* nevezzük:

$$b_{\mathbf{J}_t+1,t+\mathbf{J}_t+1} = \sum_{j=L}^{\mathbf{J}_t} \theta_{t+j}(1-\tau_{j,t+j})w_{j,t+j}g^{\mathbf{J}_t-j+1},$$

azaz

$$b_{\mathbf{J}_t+1,t+\mathbf{J}_t+1} = \sum_{j=L}^{\mathbf{J}_t} \theta_{t+j}(1-\tau_{j,t+j})w_{j,L}g^{t+\mathbf{J}_t+1}.$$

Figyeljük meg, hogy a gyakorlatban $\theta_{t+j}$ és $\tau_{j,t+j}$ változhatnak az idővel, de elméletben esetenként feltesszük, hogy a $\theta$ skálaszorzó és a $\tau$ járulékkulcs időben állandó. Ekkor a kezdőnyugdíj arányos az $(1-\tau)\hat{w}_{t+\mathbf{J}_t+1}$ *valorizált életpálya-nettókeresettel*:

$$b_{\mathbf{J}_t+1,t+\mathbf{J}_t+1} = \theta(1-\tau)\hat{w}_{t+\mathbf{J}_t+1},$$

ahol

$$\hat{w}_{t+\mathbf{J}_t+1} = \sum_{j=L}^{\mathbf{J}_t} w_{j,t+j}g^{\mathbf{J}_t-j+1} = g^{t-L+\mathbf{J}_t+1}\sum_{j=L}^{\mathbf{J}_t} w_{j,L}.$$

A *már megállapított nyugdíjak* általánosan bér–ár-indexeltek, rendre $\iota_t$ és $1 - \iota_t$ súlyokkal:

$$b_{i+1,t+i+1} = b_{i,t+i}g^{\iota_t}, \qquad i = \mathbf{J}_t + 1, \ldots, \mathbf{I}_t - 1.$$

Az egyének *nyugdíjvárománya* kulcsszerepet játszik a felosztó-kirovó nyugdíjrendszer korosztályi terheinek értékelésében. A $t$-edik időszakban született, éppen $i$ korú egyén $d_{i,t+i}$ nyugdíjvárományát az időszak végi összegzett nyugdíjvárományok jelenértékével definiáljuk. A rendszer implicit nyugdíjterhének meghatározásához szükségünk van a $[v, z]$ időszakbeli *kumulált kamattényezőre*:

$$\rho_{v,z} = \prod_{t=v+1}^{z} R_t, \qquad \text{ha} \qquad z > v; \qquad \text{és} \qquad \rho_{v,v} = 1.$$

Egy $t$-ben született dolgozó $t + h$-adik időszaki $w_{h,t+h}$ keresete a $t + i$-edik időszakban $\theta_{t+h}w_{h,t+h}g^{i-h}$ nyugdíjrészt hoz, $h = L, \ldots, \mathbf{J}_t$ és $i = \mathbf{J}_t + 1, \ldots, \mathbf{I}_t$.

Ezért a dolgozó nyugdíjvárománya a $t$-edik időszakban

$$d_{j,t+j} = g^{t-L}\sum_{h=L}^{j}\theta_{t+h}(1-\tau_{h,t+h})w_{h,L}\sum_{i=\mathbf{J}_t+1}^{\mathbf{I}_t} g^i\rho_{t+j,t+i}^{-1}, \qquad j = L \ldots, \mathbf{J}_t.$$

A $t$-ben született, $i$ korú nyugdíjas $t + i + 1$ és $t + \mathbf{I}_t$ időszak között megmaradó nyugdíjvárománya

$$d_{i,t+i}=\sum_{h=i+1}^{\mathbf{I}_t} b_{h,t+h}\rho_{t+i,t+h}^{-1}, \qquad i=\mathbf{J}_t+1,\ldots,\mathbf{I}_t.$$

Az aggregátumokban a hosszmetszeti pályák helyett keresztmetszeti profilok szerepelnek. (A nyugdíjvárományok profilját a *Függelékben* adjuk meg.) Lehet, hogy a nyugdíjrendszer nincs egyensúlyban, és ekkor az aggregált kiadások és bevételek közti különbség a *nyugdíj-költségvetési hiány*:

$$G_t=\sum_{i=L}^{I_t} n_{i,t}(b_{i,t}-\tau_t w_{i,t}).$$

Az explicit nyugdíjadósság ($D_t^E$) dinamikus egyenlete

$$D_t^E=R_t D_{t-1}^E+G_t.$$

Aggregálva az egyéni nyugdíjvárományokat, adódik az *aggregált implicit nyugdíjadósság*:

$$D_t^I=\sum_{i=L}^{I_t} n_{i,t}d_{i,t}.$$

Az explicit és az implicit adósság összege az *aggregált nyugdíjadósság*:

$$D_t=D_t^E+D_t^I.$$

A nyugdíjrendszert *korosztályok között igazságosnak* nevezzük, ha a teljes nyugdíjadósság párhuzamosan nő az aggregált kibocsátással: $D_t/Y_t$ állandó. Mivel az aggregált kibocsátás nem szerepel a modellben, aggregált bérekkel kell helyettesíteni.

Számos országban számos időszakban a rendszer tisztán felosztó-kirovó, azaz a rendszer minden időszakban egyensúlyban van: $G_t = 0$. Ekkor a $\tau_t^\circ$ egyensúlyi járulékkulcs képlete

$$\tau_t^\circ=\frac{\sum_{i=J_t+1}^{I_t} n_{i,t}b_{i,t}}{\sum_{j=L}^{J_t} n_{j,t}w_{j,t}}.$$

De $b_{i,t}$ függ $\tau_v$-től, ha $v < t$, mint láttuk fentebb.

Egy általános modellben adva vannak a ($b_{i,t}$) kezdeti feltételek és ezek meghatározzák $\tau_t^\circ$-t. Vegyük azonban figyelembe, hogy ugyanakkor ($b_{i,t}$) függ $\tau_{-J_1+t},\ldots,\tau_{-1+t}$-tól. Ha nem akarjuk definiálni a kezdeti járulékkulcsokat, akkor feltehetjük, hogy a rendszer állandósult állapotból indult. Akkor helyettesítéssel, $\iota_t = 1$ bérindexálást feltételezve: $b_{i,t} = b_t$, és a nyugdíjasok $P_t$ létszámával osztva adódik az állandósult állapotbeli járulékkulcs:

$$\tau W_t=\theta P_t\hat{w}_t-\tau\theta P_t\hat{w}_t, \qquad \text{azaz} \qquad \tau=\frac{\theta P_t\hat{w}_t}{W_t+\theta P_t\hat{w}_t}, \qquad t<0.$$

Eddig feltettük, hogy a fogyasztási pályák adottak, mostantól kezdve a fogyasztási pályákat egyéni optimalizálásból vezetjük le.

## Optimális fogyasztási pályák

Először megvitatunk egy egyszerű életciklusmodellt, ahol a háztartások egy egyszerű életpálya-hasznossági függvényt maximalizálnak egy életpálya-költségvetési feltétel mellett. Másodszorra bevezetünk néhány bonyodalmat: a szokáshoz való kötődést, az örökséget, a hitelkorlátot és a sokkokat. Ez lehetővé teszi, hogy levezessük a vagyondinamikát, és elvben mérlegeljük a felosztó-kirovó rendszer részleges privatizálását.

*Egy egyszerű életciklusmodell*

Ahogyan az szokás, a háztartások fogyasztási blokkját mikroökonómiai változókból építjük fel. Legyen az *i* korú háztartásfő fogyasztása a *t*-edik időszakban $c_{i,t}$. Ezen a ponton ezt a mennyiséget adottnak vesszük, és későbbre halasztjuk a magyarázatát.

Mérlegeljünk egy *t*-edik évben született dolgozót és háztartását egy későbbi időszakban. Feltesszük, hogy minden gyermek szülője fogyasztásának $\mu$-szörösét fogyasztja ($0 < \mu \leq 1$). Legyen a család fogyasztási fajlagosa $m_{i,t}$ (vö. *Meier–Wrede* [2005]). Ekkor igaz

$$m_{i,t+i} = \begin{cases} 1 + \mu f_{t+H}, & \text{ha } H \leq i < H + L; \\ 1, & \text{ha } L \leq i < H \text{ vagy } H + L \leq i \leq \mathbf{I}_t. \end{cases}$$

Bevezethetjük az aggregált fogyasztást is:

$$C_t = \sum_{i=L}^{I_t} n_{i,t} m_{i,t} c_{i,t}.$$

*Krueger* [2004]-t követve, az $a_{i,t+i}$ időszakvégi felhalmozott vagyont és az $s_{i,t+i}$ időszakos megtakarítást a következőképp definiáljuk:

$$a_{i,t+i} = R_{t+i} a_{i-1,t-1+i} y_{i,t+i} - m_{i,t+i} c_{i,t+i}$$

és

$$s_{i,t+i} = a_{i,t+i} - a_{i-1,t-1+i} = a_{i-1,t-1}(R_{t+i} - 1) + y_{i,t+i} - m_{i,t+i} c_{i,t+i}.$$

A kezdeti és a végső vagyon nullával azonos: $a_{-1,t} = 0 = a_{I_t,t}$, minden *t*-re.

Az aggregált vagyon és megtakarítás definíciói rendre

$$A_t = \sum_{i=L}^{I_t} n_{i,t} a_{i,t} \qquad \text{és} \qquad S_t = \sum_{i=L}^{I_t} n_{i,t} s_{i,t}.$$

Definíció szerint $A_t = R_t A_{t-1} + S_t$.

Mivel a dolgozók járulékot fizetnek, és a nyugdíjasok nyugdíjat kapnak, $y_{i,t+i}$ jövedelmük különbözik $w_{i,t+i}$ keresetüktől. Ezért az életpálya-költségvetési korlátba az utóbbiak helyett az előbbieket írjuk. A jövedelmi és a fogyasztási pálya $t + L$-re vetített jelenértékét azonosítva,

$$\sum_{i=L}^{\mathbf{I}_t} \rho_{t+L,t+i}^{-1} (y_{i,t+i} - m_{i,t+i} c_{i,t+i}) = 0.$$

A $(c_{i,t+i})$ optimális pálya meghatározásához feltesszük a következő életpálya-hasznossági függvényt:

$$\sum_{i=L}^{\mathbf{I}_t} \delta^{i-L} u_i(c_{i,t+i}),$$

ahol $0 < \delta \leq 1$ a leszámítolási tényező és $u_i(c_{i,t+i})$ a háztartásfő időszaki hasznosságfüggvénye *i* korában. Figyelembe véve a korspecifikus és időben változó háztartási fajlagost, feltesszük, hogy az időszaki hasznosságfüggvénye egyenlő a következő szorzattal: a háztartásfő hasznosságfüggvénye szorozva a háztartási fajlagossal szorozva az aktivitási jelzővel, $\beta_{i,t+i}$-vel, amely 1, ha a háztartásfő dolgozik, és $\beta$ egyébként, ahol $0 < \beta < 1$ (vö. *Scholz és szerzőtársai* [2006]). Összegezve:

$$u_i(c_{i,t+i}) = \beta_{i,t+i} m_{i,t+i} u(c_{i,t+i}),$$

ahol

$$\beta_{i,t+i} = \begin{cases} 1, & \text{ha } L \le i \le \mathbf{J}_t; \\ \beta, & \text{ha } \mathbf{J}_t < i \le \mathbf{I}_t. \end{cases}$$

Ahhoz, hogy szép analitikus eredményeket kapjunk, fel kell tennünk, hogy állandó relatív kockázatelutasítással (CRRA) jellemezhető hasznosságfüggvényünk van:

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, & \text{ha } \gamma > 1; \\ \log x, & \text{ha } \gamma = 1. \end{cases}$$

(Figyelembe véve a rugalmatlan időbeli helyettesíthetőséget, kizárjuk a $0 \le \gamma < 1$ esetet.)

Ekkor (a *Függelékben* szereplő *Optimális fogyasztási pályák* rész értelmében) az optimális fogyasztási pálya kezdő és folytatott értéke rendre

$$c_{L,t+L} = \frac{\sum_{i=L}^{\mathbf{I}_t} \rho_{t+L,t+i}^{-1} y_{i,t+i}}{\sum_{i=L}^{\mathbf{I}_t} \delta^{(i-L)/\gamma} \rho_{t+L,t+i}^{1/\gamma-1} \beta_{i,t+i}^{1/\gamma} m_{i,t+i}}$$

és

$$c_{i,t+i} \delta^{(i-L)/\gamma} (\rho_{t+L,t+i} \beta_{i,t+i})^{1/\gamma} c_{L,t+L}, \qquad i = L+1, L+2, \ldots, \mathbf{I}_t.$$

A későbbiek kedvéért (például amikor sokkokat vizsgálunk) érdemes másik alakban is felírni a fogyasztási pályát, amely nem tesz különbséget kezdeti és folytatott fogyasztás között. Másrészt $a_{i-1,t-1}$-re is szükség van a megmaradó életpálya jelenértékének kiszámításához. Mivel $\beta_{L,t} = 1$, de $\beta_{i,t}$ különbözhet 1-től, $1/\beta_{i,t}$ megjelenik a nevezőben.

Fogyasztás $i$ korban a $t$-edik időszakban:

$$c_{i,t} = \frac{R_t a_{i-1,t-1} + \sum_{j=i}^{\mathbf{I}_{t-i}} \rho_{t,t+j-i}^{-1} y_{j,t+j-i}}{\sum_{j=i}^{\mathbf{I}_{t-i}} \delta^{(j-i)/\gamma} \rho_{t,t+j-i}^{1/\gamma-1} (\beta_{j,t+j-i} / \beta_{i,t})^{1/\gamma} m_{j,t+j-i}}$$

és rendre meghatározzuk $a_{i,t}$-t és $c_{i,t+1}$-et.

## *Egy összetett életciklusmodell*

Végezvén az egyszerű életciklusmodellel, először feltételezzük, hogy a szokások rögzülnek, majd bevezetjük örökséget és hitelkorlátot. Mivel a jövedelmek zöme kereset, és a többi összetevő, mint a nyugdíj vagy az örökség a bérdinamikát követi, a következő *szokásrögzítő* mechanizmust tételezzük fel. Miközben az egyének optimalizálják fogyasztási pályájukat, inkább a viszonylagos, mintsem az abszolút fogyasztásukat mérlegelik. Ezért a hasznosságfüggvénynek is tükröznie kell a termelékenység hosszú távú növekedését. E folyamat legegyszerűbb modellezésekor az egy főre jutó $c_{i,t+i}$ fogyasztást $g^{t+i}$ termelékenységi szinttel leszámítoljuk:

$$u_{i,t+i}(c_{i,t+i}) = \beta_{i,t+i} m_{i,t+i} u(c_{i,t+i}/g^{t+i}).$$

Innen az optimális fogyasztási pálya

$$c_{i,t+i} \delta^{(i-L)/\gamma} (\rho_{t+L,t+i} \beta_{i,t+i})^{1/\gamma} c_{L,t} g^{i-L}, \qquad i = L+1, L+2, \ldots, \mathbf{I}_t,$$

ahol a fogyasztás kezdőértéke

$$c_{L,t+L} = \frac{\sum_{i=L}^{\mathbf{I}_t} \rho_{t+L,t+i}^{-1} y_{i,t+i}}{\sum_{i=0}^{\mathbf{I}_t} \delta^{(i-L)/\gamma} \rho_{t+L,t+i}^{1/\gamma-1} \beta_{i,t+i}^{1/\gamma} m_{i,t+i} g^{i-L}}.$$

Figyelembe véve, hogy $\beta_{i,t}$ különbözhet 1-től, rekurzív módon megkapjuk a fogyasztás megfelelő értékeit,

$$c_{i,t} = \frac{R_t a_{i-1,t-1} + \sum_{j=i}^{\mathbf{I}_{t-i}} \rho_{t,t+j-i}^{-1} y_{j,t+j-i}}{\sum_{j=i}^{\mathbf{I}_{t-i}} \delta^{(j-i)/\gamma} \rho_{t,t+j-i}^{1/\gamma-1} (\beta_{j,t+j-i} / \beta_{i,t})^{1/\gamma} m_{j,t+j-i} g^{j-i}},$$

valamint váltakozva kell kiszámítani $a_{i,t}$-t és $c_{i,t}$-t.

A második bonyodalom az *örökség*. Jól ismert, hogy a szülő örökséget hagy a gyermekeinek. Ha nem akarjuk *Barro* [1974] módjára végtelen dinasztikus láncokkal bonyolítani a tárgyalást, akkor egyszerű megoldást kell találnunk. Jelölje

$$\bar{w}_t = \sum_{j=L}^{I_t} \rho_{t-I_t+j,t} w_{j,t-I_t+j}$$

a $t$-edik időszakban elhunyt egyén életpálya-keresetének folyóértékét, és tegyük fel, hogy minden szülő e változó $\kappa$ részét hagyja gyermekeinek ($0 \le \kappa < 1$), $q_t = \kappa \bar{w}_t$. Örökösei életkora $F_t = I_t - H$. Mivel $f_{t-F_t}$ örökös között oszlik meg az örökség, az egy főre jutó örökség $q_t^* = q_t / f_{t-F_t}$. Jelölje $\hat{y}_{i,t}$ az $i$ korú $t$-edik időszakbeli *kiterjesztett jövedelmét*, amely a hagyományos jövedelem és az előjelezett örökség (a kapott örökség pozitív, az adott negatív) összege:

$$\hat{y}_{i,t} = y_{i,t} + \begin{cases} q_t / f_{t-F_t}, & \text{ha } i = F_t; \\ -q_t, & \text{ha } i = I_t; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor a korábbi azonosságok a következőképp módosulnak:

$$a_{i,t} = R_t a_{i-1,t-1} + \hat{y}_{i,t} - m_{i,t} c_{i,t}$$

és

$$s_{i,t} = a_{i-1,t-1}(R_t - 1) + \hat{y}_{i,t} - m_{i,t} c_{i,t}.$$

A kiterjesztett jövedelemmel a korábbi képlet érvényben marad, csak egy kalapot kell az $y_{i,t}$-re tenni:

$$\hat{c}_{i,t} = \frac{R_t a_{i-1,t-1} + \sum_{j=i}^{\mathbf{I}_{t-i}} \rho_{t,t+j-i}^{-1} \hat{y}_{j,t+j-i}}{\sum_{j=i}^{\mathbf{I}_t} \delta^{(j-i)/\gamma} \rho_{t,t+j-i}^{1/\gamma-1} (\beta_{j,t+j-i} / \beta_{i,t})^{1/\gamma} m_{j,t+j-i} g^{j-i}}.$$

A harmadik bonyodalom a *hitelkorlát* léte: a vagyon nem lehet negatív: $a_i \ge 0$, $i = L, L + 1, \ldots, \mathbf{I}_t - 1, \mathbf{I}_t$.

A hitelkorlát különösképpen feszes, amikor a gyerekeket alacsony kezdőkeresetekből kell ellátni, miközben jelentékeny társadalombiztosítási járulék terheli a keresetet. Sajnos *Hubbard és szerzőtársai* [1995] nem vették figyelembe a „családszerkezet változásait" (393. o.). A hitelkorlát melletti optimalizálási feladat nem túl egyszerű, de saját numerikus modellünkben Heikki Oksanen javasolt egy nagyon egyszerű és hatékony algoritmust.

Eléggé kis nyugdíjak és alacsony termékenység, valamint elég nagy bérek esetén a hitelkorlát egyáltalán nem megszorító. Egyéb esetekben az örökséghez jutás és a gyermekek távozása közt található egy alkalmas naptári időszak:

$$t + F_t \le K_t \le t + L + H - 1 \qquad \text{vagy} \qquad t + L + H - 1 \le K_t \le t + F_t$$

vagy életkor:

$$F_t \le V_t \le L + H - 1 \qquad \text{vagy} \qquad L + H - 1 \le V_t \le F_t.$$

Az optimalizálást két szakaszra kell bontani $K_t$ vagy $V_t$ segítségével, és a gyakorlatban elhagyhatók a köztes hitelkorlátok.

1. Oldjuk meg a feladatot $[t + L, K_t]$ időre, illetve $[L, V_t]$ korra!

2. Oldjuk meg a feladatot a $[K_t, t + \mathbf{I}_t]$ időre vagy $(V_t, \mathbf{I}_t]$ korra, ahol a $K_t$-edik időszak végén kapja az egyén az örökséget, és a $t + \mathbf{I}_t$-edik időszak végén hagyja az örökséget.

Egyesíthető a két eset a következő jelöléssel:

$$M_{i,t} = \begin{cases} V_t, & \text{ha } L \le i \le V_i; \\ \mathbf{I}_{t-i}, & \text{ha } V_{t-1} < i \le \mathbf{I}_{t-i}. \end{cases}$$

Most nagyon jól jön a $\hat{y}_{i,t+i}$ bővített jövedelem, mivel a kapott és hagyott örökség befoglalható e jövedelembe. Az általános képlet a következő:

$$\hat{c}_{i,t} = \frac{R_t a_{i-1,t-1} + \sum_{j=i}^{M_{i,t}} \rho_{t,t+j-i}^{-1} \hat{y}_{j,t+j-i}}{\sum_{j=i}^{M_{i,t}} \delta^{(j-i)/\gamma} \rho_{t,t+j-i}^{1/\gamma-1} (\beta_{j,t+j-i} / \beta_{i,t})^{1/\gamma} m_{j,t+j-i} g^{j-i}}$$

és rendre meghatározzuk $a_{i,t}$-t és $M_{i,t}$-t.

Megjegyezzük, hogy tapasztalataink szerint heurisztikus eljárásunkban a vagyon kismértékben negatívvá válhat $V_t$ körül. A legegyszerűbb válasz erre: ilyen kismértékű hitelek felvehetők. A teljes válasz egy bonyolultabb algoritmust igényel, amitől itt eltekintünk.

A kezdeti vagyonértékeket $(a_{i,-1})$ adja. A legegyszerűbb hozzáállás az lenne, hogy feltennénk róla, hogy olyan korábbi optimalizálás eredménye, amely állandósult állapotban történt. Részletezve: vissza kell mennünk $-I_0$-ig. Tekintsük a $t = -I_0$-ben született egyént, aki az $L - I_0$-adik időszakban kezdett el dolgozni, $a_{L-1,L-I_0-1} = 0$ vagyonnal. Megoldva az optimalizálási feladatot, megkapjuk az $(a_{i,-I_0+i})_{i=L}^{I_0}$ vagyonpályát, amely könnyen vagyonprofilba fordítható:

$$(a_{i,-I_0})_{i=L}^{I_0} = (a_{i,-I_0+i} / g^{i-L})_{i=L}^{I_0}.$$

## *Sokkok*

Eddig elhanyagoltuk a rendszert érhető sokkokat, amelyek az optimalizálás megismétlésére késztethetik az egyéneket. Most áthidaljuk e hiányt. Tegyük fel, hogy a $T$-edik időszakban a kormányzat hirtelen megváltoztatja exogén stratégiai paraméterértékeit: $\theta_t$, $i_t$ és $J_t$ és később esetleg $t_t$ értékeit. Jelölje a megváltoztatott értékeket hullám. A jelölés kényelme érdekében $\tilde{y}_{i,t+i}$-ban elhagyjuk a kalapot. Ekkor a dolgozóknak és a nyugdíjasoknak szintén változtatni kell maradék fogyasztási pályájukon. A paraméterváltozások miatt az $\tilde{y}_{i,t+i}$ jövedelem szintén változik $t \ge T$ esetén.

A sokk utáni optimum a $T$-edik időszakban

$$\tilde{c}_{i,T} = \frac{R_T a_{i-1,T-1} + \sum_{j=i}^{M_{i,T}} \rho_{T,T+j-i}^{-1} \tilde{y}_{j,T+j-i}}{\sum_{j=i}^{M_{i,T}} \delta^{(j-i)/\gamma} \rho_{T,T+j-i}^{1/\gamma-1} (\beta_{j,T+j-i} / \beta_{i,T})^{1/\gamma} m_{j,T+j-i} g^{j-i}}$$

és meghatározza $a_{i,T}$-ket.

Legalább két különböző módon modellezhetjük az egyének várakozásait a kormányzati döntésekre, illetve hatásukat $\tilde{y}_{i,t}$-re.

*a)* Racionális várakozások esetén az egyének pontosan előre látják a $\theta_t$, $\iota_t$, $J_t$ és $\tau_t$ kulcsparaméterek értékeit:

$$\theta_t^r = \theta_t, \qquad \iota_t^r = \iota_t, \qquad J_t^r = J_t \qquad \text{és} \qquad \tau_t^r = \tau_t; \qquad t = 0, 1, \ldots;$$

*b)* A naiv várakozások esetén az egyének a $\theta_t$, $\iota_t$ és $\tau_t$ paraméterek jövőbeli értékét rendre trendbeli értékeikkel azonosítják:

$$\theta_p^n = \theta_t, \quad \iota_t^p = \iota_t, \quad J_p^n = J_t \quad \text{és} \quad \tau_p^n = \tau_t; \quad p = t+1, \ldots, \quad t = 0, 1, \ldots,.$$

Ha $e = r, n$, akkor $\tilde{y}_{i,t}^e$ tartalmazza $\tau_v^e$-t és $\theta_v^e$-t, midőn $v < t$.

Ebben a cikkben főleg a racionális várakozásokra összpontosítjuk a figyelmünket, de helyt adunk a naiv várakozásnak is.

## Numerikus eredmények

Megfogalmaztuk modellünket, amely azonban olyan bonyolult lett, hogy elemzésekor kénytelenek vagyunk számítógépes programok segítségéhez folyamodni. A bemutatást egyszerűsítendő, évek helyett évtizedekkel számolunk. Ennek az a hátulütője, hogy az új kor- és időértékeket is egész számoknak kell vennünk, s ezért a változások túlzottan hirteleneknek mutatkoznak.

### *Alapfutás*

Először ismertetjük az alapfutást. Kezdjük a *demográfiai blokkal!* Feltesszük, hogy a munkába lépés, a szülési és halálozási kor rendre $L = 2$, $H = 3$ és $I = 6$ évtized.

Kezdjük a dinamikát $t = 0$-val (naptári idő: 1950) és tegyük fel, hogy a rendszer az előző hét évtizedben ($t = -7, -6, \ldots, -1$) állandósult állapotban volt.

A termékenység egyenletesen csökken $t = 2$ (1970)-től kezdve 1-ről 0,79-re három évtized alatt, azaz lezárult $t = 5$-ben (2000). Képletben:

$$f_t = \begin{cases} f1, & \text{ha } t < T1^f; \\ f1 + \triangle f(t - T1^f), & \text{ha } T1^f \le t \le T2^f; \\ f2, & \text{ha } t > T2^f, \end{cases}$$

ha $f2 - f1 = \triangle f(T2^f - T1^f)$. Numerikus értékek: $f1 = 1 > f2 = 0{,}79$; $\triangle f = 0{,}07$; $T1^f = 2$, $T2^f = 5$.

Születéskor várható élettartam $T^I$-ben $I1$-ről $I2$-re ugrik. Képletben:

$$I_t = \begin{cases} I1, & \text{ha } t < T^I; \\ I2, & \text{ha } t \ge T^I. \end{cases}$$

A paraméterértékek: $I1 = 6$ és $I2 = 7$, $T^I = 5$. A jobb megértés érdekében részletezzük a változást: $I_t$ értéke $I_4 = 6$-ról ugrik 1990-ben, $I_5 = 7$-re 2000-ben.

Egyelőre rögzítjük a korhatárt: $J_{0,t} = 5$, de később változtatunk rajta is. Feltesszük, hogy a kezdeti népességi állapot stacionárius:

$$n_{0,-I_0} = n_{0,-I_0+1} = \ldots = n_{0,-1} = 1$$

és a termékenység egységnyi volt: $f_{-I_0} = \ldots = f_{-1} = 1$.

A *Függelékben* szereplő *F1.a táblázat* bal fele bemutatja a gyermekek, a dolgozók és a nyugdíjasok számának időbeli alakulását. A $t$-edik időszak $i$ korú egyéneinek létszáma a táblázat $t$ jelzésű sorának $i$ jelzésű oszlopában áll. Itt jelenik meg először az együttélő korosztályok modelljeire oly jellemző, hosszmetszetet leíró *átló*. Ezek az egyének a $t + 1$-edik időszakban $i + 1$ korúak lesznek, mutatóik a táblázatban 1 sorral lejjebb és 1 oszloppal jobbra kerülnek, amíg csak meg nem halnak. Az összetartozó keresztmetszeti adatok természetesen egy-egy sorban helyezkednek el. Felállásunkban az élettartam megugrása csak késlelteti, de nem állítja meg a termékenységcsökkenés hatását a népességszámra. A valódi probléma nem is a népesség csökkenése, hanem a nyugdíjasok arányának gyors növekedése.

Felhasználva, hogy a nyugdíjas- és bérblokk megoldható a fogyasztási blokk megoldása nélkül, kezdetben az előbbieket mérlegeljük.

Vegyük át *Mincer* [1974] kvadratikus bér–életkor-egyenletét:

$$w_{i,t} = (\omega_0 + \omega_1 i - \omega_2 i^2) g^{t-L}, \qquad i = L+1, \ldots, J_t,$$

ahol $\omega_0$, $\omega_1$ és $\omega_2$ valós együtthatók. Feltesszük, hogy a kezdő relatív kereset 1: $\omega_0 + \omega_1 L - \omega_2 L^2 = 1$, és szerény 20 százalékos bérnövekedéssel számolunk az $i = J_0$ kezdeti nyugdíjkorhatárig: numerikusan, $\omega_0 = 0{,}664$; $\omega_1 = 0{,}222$ és $\omega_2 = 0{,}022$.

Miután a relatív kamattényezőt $\alpha = 1{,}015^{10}$-nek és a termelékenységnövekedési tényezőt $g = 1{,}0175^{10}$-nek választottuk, meghatározhatjuk az aggregált teljes kereset és kamattényező pályáját. Az örökségi együtthatót $\kappa = 0{,}05$-nak választjuk.

Tegyük fel, hogy a skálaszorzó $\theta_t = 0{,}022 \times 10$. Ahhoz, hogy megszabaduljunk a $t_t$ járulékkulcsra vonatkozó körülményes kezdeti feltételektől ($t = -7, -6, \ldots, 0, 1$), állandósult állapotbeli értékként határozzuk meg őket. A népességöregedés miatt $t$ = 2-től (1970), a $\tau_t^\circ$ egyensúlyi járulékkulcs 0,18-ról 0,39-re emelkedik $t$ = 7-re (2020), majd 0,355 körül stabilizálódik. Végül megemlítjük, hogy az implicit nyugdíjadósság aggregált bérhez viszonyított értéke meredeken emelkedik 1930 és 2010 között: 0,33-ról 0,94-ra. (Vegyük figyelembe, hogy évtizedmodellünkben ez az állomány/folyam mutató sokkal kisebb, mint a megszokott évjárati modellben lenne.)

A *Függelékben* szereplő *F1.b táblázathoz* érve a fogyasztási blokk kitöltéséhez meg kell adni a hasznosságfüggvény paraméterértékeit. Az intertemporális helyettesítés rugalmasságának reciproka: $\gamma = 4$, hasznosságkorrekció: $\beta = 0{,}7$; leszámítolási tényező: $\delta = 1/R_A = 1/(\alpha g) = 0{,}9682768$. Emellett a gyerekfogyasztás szorzója: $\mu = 0{,}5$.

A növekvő járulékkulcs miatt arányosan csökken a fogyasztás és a megtakarítás. Például $t$ = 0-ban (1950) a felnőtt fogyasztási profil a kezdő állandósult állapotbeli optimumnak felel meg. (A számok az időszak legfiatalabb dolgozóinak teljes bérköltségében vannak megadva.) A következő évtizedben a profil alkalmazkodik az új körülményekhez. A fogyasztási profil körülbelül a $t$ = 13-adik évtizedben (2080-ban) stabilizálódik a záró állandósult állapotban.

A vagyondinamika (*F1.c táblázat*) egyszerű következménye a korábbi jövedelmi és fogyasztási pályáknak. Vegyük észre, hogy az $V_t$ kritikus kor (amikor a pálya közepi vagyon nullára süllyed) az átalakulás folyamán a $t$ = 4-edik időszakban (1990-ben) 4-ről 3-ra süllyed. A hitelkorlát akkor válik igazán fontossá, amikor a modell későbbi továbbfejlesztésekor privatizálást és a feltőkésítést vizsgáljuk majd. Önkritikusan megjegyezzem, hogy korábbi munkámban (*Simonovits* [2002] 15. fejezet) én sem vettem tekintetbe e fontos bonyodalmat.

## *Stratégiaváltozatok racionális várakozások esetén*

Most ellépünk az alapfutástól és olyan változatokat fogunk vizsgálni, amelyekben az endogén járulékkulcs-emelésen túl a kormányzat másképpen is reagál a $t$ = 2-edik időszaktól kezdve bekövetkező demográfiai változásokra. A nyugdíjreform-változatok a $t$ = 6-odik évtizedben (2010-ben) indulnak. Három különböző stratégiát elemzünk: *1.* a skálaszorzó csökkentését, *2.* a bérindexálás felváltását árindexálással és *3.* a nyugdíjkorhatár felemelését. Egyelőre feltesszük, hogy e változásokat pontosan előre látják az egyének, és megfelelően alkalmazkodnak hozzájuk: *racionális várakozások.*

**1. Csökkenő skálaszorzó.** Ebben a forgatókönyvben a skálaszorzó a $t = 6$-odik évtizedben (2010-től) azonnal lecsökken $\theta_0 = 0{,}022 \times 10$-ről $\theta_T = 0{,}015 \times 10$-re. Elkerülendő a felesleges ismétlést, az *F2.a táblázatban* a korai évtizedek változatlan adatait nem közöljük. Ugyancsak elhagyjuk az érintetlen demográfiai blokkot.

Figyeljük meg, hogy a kezdő nyugdíjak viszonylagos csökkenésével a járulékkulcs – 0,39-os túllendüléssel – a korábbinál kisebb érték, 0,28 körül stabilizálódik! Azt is érdemes megemlíteni, hogy az alapfutáshoz képest visszafogottabb járulékkulcsok miatt a nyugdíjak – bár csökkennek, de – a zsugorított skálaszorzókkal nem arányosan csökkennek. Például $b_{60,\,2100} = 0{,}493 < 0{,}637$ esetén a csökkenés csak 23 százalék, míg a skálaszorzó 32 százalékkal zuhan. Hasonlóképpen, az implicit nyugdíjadósság szintén csökken 2020-tól kezdve, és gyorsabban, mint az alapfutásban.

A *F2.b táblázat* a fogyasztási blokk adatait mutatja be. (Hogy elkerüljük az ismétlést, az örökség oszlopát kihagytuk.) Érdemes a 2010-es évtized összehasonlításával kezdeni: a csökkentett járulékkulcsok miatt a két legfiatalabb felnőtt korosztály fogyasztása nő, a többieké csökken. Például $c_{40,\,2010}$ 0,697-ről 0,657-re zuhan. Az átmenet folyamatát figyelve, különösen az átmeneti korszak idősebbjei veszítenek.

**2. Bérindex helyett árindex.** Ebben a forgatókönyvben a már megállapított nyugdíjak 2000-ig érvényes bérindexálását a $t = 6$-odik évtizedtől 2010-től árindexálással váltjuk fel. Az *F3.a–F3.b táblázat* tartalmazza a lényeges adatokat. A redukált skálaszorzóhoz hasonlóan, az indexálási váltás is csökkenti a záró állandósult állapotbeli járulékkulcsot: $\tau_{2100} = 0{,}338 < 0{,}355$, de növeli a kezdőnyugdíjat: $b_{60,\,2100} = 0{,}656 > 0{,}637$. A záró állandósult állapot fogyasztási profiljai hasonlók, de az átmenet során drámai változásoknak vagyunk tanúi. Például $c_{60,\,2010}$ 0,662-ről 0,640-re csökken, míg $c_{20,\,2010}$ 0,547-ről 0,575-re nő.

**3. Emelkedő nyugdíjkorhatár.** Ebben a forgatókönyvben a $J_t$ korhatár egyszerre 5-ről 6-ra ugrik (2010-ben). Az *F4.a–F4.b táblázat* közli az új adatokat, de a megváltozott demográfiai és nyugdíjblokk visszakerül a képbe.

A nyugdíjkorhatár radikális emelése helyreállítja, sőt még javítja is a nyugdíjas/dolgozó létszámarányt: 2/3,8 = 0,526-ről (2000-ben) 1/4,58 = 0,218-re (2010-ben). Nem meglepő tehát, hogy a járulékkulcs visszatér a nagyon magas 0,38-as értékéről a kezdőérték felé, 0,216-re. Ugyanakkor a hosszabb szolgálati idő megnöveli a kezdőnyugdíjakat: 0,637-ről 0,978-re 2100-ben, de csökkenti az implicit nyugdíjadósságot: 0,734-ről 0,451-re. Az alapfutáshoz képest a fogyasztás is jelentősen emelkedik: $c_{20,\,2100} = 0{,}701 > 0{,}575$ stb. Most az átmeneti korszak korosztályainak a fogyasztása is nő, nem pedig csökken: $c_{40,\,2100} = 0{,}955$ *versus* 0,683. Más kérdés, hogy ezért a többletfogyasztásért többet is kell dolgozni, tehát csökken a szabadidő.

### *Stratégiaváltozatok naiv várakozások esetén*

Minden elméleti népszerűsége és vonzereje ellenére a racionális várakozások eléggé távol esnek a nyugdíjreformok világától. Érdemesnek látszik egy másik végletet is megvizsgálni, a naiv várakozásokat, amikor az egyéneket teljesen meglepik a változások. Helyhiány miatt csupán a csökkenő skálaszorzó fogyasztási blokkja esetét mutatjuk be részletesen, de mellékeljük a másik két forgatókönyv fogyasztási pályáit is *(F5.b–F5.c táblázat).*

Amikor a skálaszorzó 2010-es csökkentése meglepi a dolgozókat, akkor az *F5.a táblázat* szerint a következő változások adódnak 2000 és 2010 között: $c_{40,\,2100}$ 0,694-ről 0,717-re ugrik; viszont $c_{50,\,2100}$ 0,685-ről 0,671-re zuhan.

## Következtetések

A dolgozat végére értünk. Szerencsésnek érzem magam, hogy véletlenül olyan szemléltető paraméterértékeket választottam, amelyek mellett a heurisztikus algoritmus működik. Más, hasonlóan szemléletes esetekben azonban a heurisztika csődöt mond, ezért a folytatáshoz professzionális programozási szoftverre lesz szükségünk.

Az *1. táblázatból* is látható, mennyi fontos részletet hanyagoltunk el: például az endogén kamatlábakat és a finomabb demográfiai részleteket. Sok munkára lesz még szükség, amíg határozottabb és robusztusabb eredményekhez jutunk. Minden esetlegesség ellenére úgy érezzük, hogy korai kísérleteink igazolták megközelítésünk erejét: értelmes kvalitatív eredményeket kaptunk a forgatókönyvek különbségeire, előrelátással és anélkül.

## *Hivatkozások*

Akihiko, M. [2006]: Shrinking-Population Economics. Lessons from Japan. LTCB International Library Trust, Tokió.

Ando, A.–Modigliani, F. [1963]: The 'Life Cycle' Hypothesis of Saving: Aggregate Implications and Tests. American Economic Review, 53. 55–84. o.

Auerbach, A. J.–Kotlikoff. L. J. [1987]: Dynamic Fiscal Policy. Cambridge University Press, Cambridge.

Auerbach, A. J.–Hagemann, R. P.–Kotlikoff. L. J.–Nicoletti, G. [1989]: The Economic Dynamics of an Ageing Population: The Case of Four OECD Countries. OECD Economic Studies 12. 97–130. o. (NBER Working Paper, 1268.)

Auerbach, A. J.–Herrmann, H. (szerk.) [2002]: Ageing, Financial Markets and Monetary Policy. Springer, Berlin.

Augusztinovics Mária [2000]: The Dynamics of Retirement Savings–Theory and Reality. Structural Change and Economic Dynamics, 11. 111–128. o.

Augusztinovics Mária–Köllő János [2007]: Munkaerő-piaci pálya és nyugdíj. Közgazdasági Szemle, 54. évf. 6. sz. 529–559. o.

Baker, D.–Delong J. B.–Krugman, P. R. [2005]: Assets Returns and Economic Growth. Brooking Papers, 1. 289–330. o.

Barro, R. J. [1974]: Are Government Bonds Net Worth? Journal of Political Economy, 82. 1095–1117. o.

Beetsma, R.–Oksanen, H. [2007]: Pension Systems, Ageing and the Stability and Growth Pact. European Economy, Economic Papers, 287.

Blundell, R.–Browning, M.–Meghir, C. [1994]: Consumer Demand and the Life-Cycle Allocation of Household Expenditures. Review of Economic Studies, 61. 57–80. o.

Börsch-Supan, A.–Ludwig, A.–Winter, J. [2002]: Aging, Pension Reform, and Capital Flows. Megjelent: *Auerbach–Herrmann* (szerk.) [2002] 55–83. o.

Brooks, R. [2000]: What will Happen to Financial Markets when the Baby Boomers Retire? IMF WP /00/18. Washington, D.C.

Bütler, M. [1997]: Life-Cycle Decision Making and Public Pension Reforms. Bamberg. Difo-Druck GmbH.

Carroll, C.D.–Overland, J.–Weil, D. N. [2000]: Saving and Growth with Habit Formation. American Economic Review, 90. 341–355. o.

Casarosa, C.–Sparato, L. [2007]: Rate of Growth of Population. Saving and Wealth in the Basic Life-cycle Model when Household is the Decision Unit. CERP Discussion Paper.

Fazakas István [2008]: Children Consumption and Population Aging: A Realistic OLG Model. CEU Master Dissertation.

Fehr, H. [2000]: Pension Reform during the Demographic Transition. Scandinavian Journal of Economics, 102. 419–443. o.

Hairault, J.-O.–Langot, F. [2008]: Inequality and Social Security Reform. Journal of Economic Dynamics and Control, 32. 386–410. o.

Hubbard, R. G.–Judd, K. L. [1986]: Liquidity Constraints, Fiscal Policy and Consumption. Brookings Papers on Economic Activity, 1. 1–50. o.

Hubbard, R. G.–Skinner, J.–Zeldes, S. P. [1995]: Precauary Saving and Social Insurance. Journal of Political Economy, Vol. 103. No. 2. 360–399. o.

Kimball, M. S. [1990]: Precaurionary Saving in the Small and in the Large. Econometrica, 58. 53–73. o.

Kotlikoff, L.–Summers, L. [1981]: The Role of Intergenerational Transfers in Aggregate Capital Accumulation. Journal of Political Economy, 89. 706–732. o.

Krueger, D. [2004]: The Effects of Demographic Changes on Aggregate Savings. Some Implications from a Life Cycle Model. Discussion Paper, Frankfurt.

Meier, V.–Wrede, M. [2005]: Pension, Fertility, and Education. Working Paper 1521. CESIfo, München.

Mincer, J. [1974]: Investment in Human Capital and Personal Income Distribution. Journal of Political Economy, 66. 281–302. o.

Molnár György–Simonovits András [1996]: Várakozások, stabilitás és működőképesség az együttélő korosztályok realista modellcsaládjában. Közgazdasági Szemle, 43. évf. 863–890. o.

Oksanen, H. [2003]: Nyugdíjreformtervek a jóléti államokban öregedő népesség esetén. Közgazdasági Szemle, 50. évf. 7–8. sz. 480–497. o.

Oksanen, H. [2004]: Public Pensions in the National Accounts and Public Finance Targets. Journal of Pension Economics and Finance, 4. 291–312. o.

Oksanen, H. [2009]: Saving in an Aging Society with Public Pensions: A Lifecycle Model Application. European Economy, 370. 31 o.

Poterba, J. M. [2001]: Demographic Structure and Asset Returns. Review of Economics and Statistics, 83. 565–584. o.

Scholz, J. K.–Sheshadri, A.–Khitatrakun, S. [2006]: Are Americans Saving „Optimally” for Retirement? Journal of Political Economy, 114. 607–643. o.

Simonovits András [2002]: Nyugdíjrendszerek: tények és modellek. Typotex, Budapest.

Spieza, V. [2002]: The Greying Population: A Wasted Human Capital or Just a Social Liability? International Labour Review, 141. 71–113. o.

A Függeléket lásd a 314-321. oldalon.

# Függelék
# Néhány bizonyítás

A *Függelék* három részből áll: a nyugdíjvagyon és az optimális fogyasztás levezetése, valamint a táblázatok.

### *Nyugdíjváromány-profilok*

A hosszmetszeti pályák helyett inkább keresztmetszeti profilokra van szükségünk. Ehhez ki kell vonnunk a $J_t$, $j$ és $i$ indexeket a $t$-vel kezdődő indexekből:

Kezdőnyugdíj a $t$-edik időszakban

$$b_t = g^{t-L}\sum_{j=L}^{J_{t-1}}\theta_{t+j-J_{t-1}-1}(1-\tau_{t+j-J_{t-1}-1})w_{j,L}.$$

A dolgozók nyugdíjvagyona

$$d_{j,t} = g^{t-L-j}\sum_{h=L}^{j}\theta_{t+h-j}(1-\tau_{t+h-j})w_{h,L}\sum_{i=J_{t-1}+1}^{\mathbf{I}_{t-j}} g^i\rho_{t,t+i-j}^{-1}, \qquad j = L \ldots, J_t.$$

A nyugdíjasok nyugdíjvagyona

$$d_{i,t} = \sum_{h=i+1}^{\mathbf{I}_{t-i}} b_{h,t+h-i}\rho_{t,t+h-i}^{-1}, \qquad i = J_{t-1}+1, \ldots, I_t.$$

### *Optimális fogyasztási pályák*

Vezessük be a Lagrange-függvényt a $\lambda$ szorzóval:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=L}^{\mathbf{I}_t}\left[\delta^{i-L}u_i(c_{i,t+i}) + \lambda\rho_{t+L,t+i}^{-1}(y_{i,t+i} - m_{i,t+i}c_{i,t+i})\right].$$

A háztartás optimális pályáját az implicit Euler-egyenletek határozzák meg:

$$\delta^{i-L}\beta_{i,t+i}u'(c_{i,t+i}) = \lambda\rho_{t+L,t+i}^{-1}, \qquad i = L, L+1, \ldots, \mathbf{I}_t.$$

Összehasonlítva az $i$-edik és az $L$-edik időszak szorzóit, adódik

$$\delta^{i-L}\beta_{i,t+i}\rho_{t+L,t+i}u'(c_{i,t+i}) = \beta_{L,t+L}u'(c_{L,t+L}).$$

Mivel $\beta_{L,t+L} = 1$, most elhagyjuk, de később visszatérünk rá.

Behelyettesítve $c_{i,t+i}$-ket a költségvetési feltételbe, $c_{L,t+L}$ meg van határozva, s ezáltal a teljes fogyasztási pálya ismert.

## Táblázatok

*F1.a táblázat*
Népesség és nyugdíjak – alapfutás

| Évtized $t$ | Gyermekek $K_t$ | Dolgozók $M_t$ | Nyugdíjasok $P_t$ | Kamattényező $R_t$ | Kezdőnyugdíj $b_t$ | Járulékkulcs $\tau_t$ | IPD/bér $D_t/W_t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1930 | 2,000 | 4,000 | 1,000 | 1,033 | 0,809 | 0,180 | 0,330 |
| 1940 | 2,000 | 4,000 | 1,000 | 1,033 | 0,809 | 0,180 | 0,330 |
| 1950 | 2,000 | 4,000 | 1,000 | 1,033 | 0,809 | 0,180 | 0,350 |
| 1960 | 2,000 | 4,000 | 1,000 | 1,033 | 0,809 | 0,180 | 0,402 |
| 1970 | 1,930 | 4,000 | 1,000 | 1,033 | 0,809 | 0,180 | 0,500 |
| 1980 | 1,790 | 4,000 | 1,000 | 1,033 | 0,809 | 0,180 | 0,663 |
| 1990 | 1,650 | 3,930 | 1,000 | 1,031 | 0,809 | 0,183 | 0,700 |
| 2000 | 1,525 | 3,790 | 2,000 | 1,029 | 0,809 | 0,379 | 0,911 |
| 2010 | 1,414 | 3,580 | 2,000 | 1,027 | 0,756 | 0,387 | 0,941 |
| 2020 | 1,303 | 3,315 | 2,000 | 1,025 | 0,703 | 0,390 | 0,932 |
| 2030 | 1,205 | 3,064 | 1,930 | 1,025 | 0,651 | 0,378 | 0,920 |
| 2040 | 1,117 | 2,828 | 1,790 | 1,025 | 0,609 | 0,354 | 0,907 |
| 2050 | 1,030 | 2,619 | 1,650 | 1,025 | 0,616 | 0,342 | 0,911 |
| 2060 | 0,952 | 2,421 | 1,525 | 1,025 | 0,627 | 0,347 | 0,841 |
| 2070 | 0,883 | 2,234 | 1,414 | 1,025 | 0,638 | 0,355 | 0,783 |
| 2080 | 0,814 | 2,069 | 1,303 | 1,025 | 0,643 | 0,357 | 0,745 |
| 2090 | 0,752 | 1,912 | 1,205 | 1,025 | 0,641 | 0,358 | 0,727 |
| 2100 | 0,697 | 1,765 | 1,117 | 1,025 | 0,637 | 0,359 | 0,734 |
| 2150 | 0,469 | 1,193 | 0,752 | 1,025 | 0,637 | 0,355 | 0,752 |

*F1.b táblázat*

Fogyasztás – alapfutás

| Évtized $t$ | Fogy(2) $c_2$ | Fogy(3) $c_3$ | Fogy(4) $c_4$ | Fogy(5) $c_5$ | Fogy(6) $c_6$ | Fogy(7) $c_7$ | Hagyott örökség $q_t$ | Aggregált megtakarítás $S_t$ | Megtakarítási hányad $\sigma_t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1930 | 0,764 | 0,764 | 0,764 | 0,783 | 0,716 | 0 | 0,326 | 1,147 | 0,013 |
| 1940 | 0,764 | 0,764 | 0,764 | 0,783 | 0,716 | 0 | 0,326 | 1,147 | 0,013 |
| 1950 | 0,770 | 0,764 | 0,764 | 0,783 | 0,716 | 0 | 0,326 | 1,147 | 0,012 |
| 1960 | 0,783 | 0,770 | 0,764 | 0,783 | 0,716 | 0 | 0,326 | 1,145 | 0,007 |
| 1970 | 0,796 | 0,783 | 0,770 | 0,783 | 0,716 | 0 | 0,326 | 1,135 | 0,008 |
| 1980 | 0,749 | 0,796 | 0,783 | 0,816 | 0,716 | 0 | 0,326 | 1,127 | 0,013 |
| 1990 | 0,641 | 0,708 | 0,740 | 0,821 | 0,744 | 0 | 0 | 1,132 | 0,070 |
| 2000 | 0,551 | 0,636 | 0,717 | 0,734 | 0,744 | 0,737 | 0,361 | 1,277 | –0,011 |
| 2010 | 0,547 | 0,543 | 0,697 | 0,707 | 0,662 | 0,734 | 0,342 | 1,205 | 0,016 |
| 2020 | 0,551 | 0,537 | 0,683 | 0,683 | 0,634 | 0,649 | 0,320 | 1,202 | 0,027 |
| 2030 | 0,568 | 0,540 | 0,700 | 0,669 | 0,613 | 0,622 | 0,304 | 1,216 | 0,025 |
| 2040 | 0,584 | 0,556 | 0,713 | 0,686 | 0,600 | 0,601 | 0,293 | 1,240 | 0,020 |
| 2050 | 0,587 | 0,573 | 0,719 | 0,700 | 0,616 | 0,589 | 0,288 | 1,254 | 0,015 |
| 2060 | 0,581 | 0,575 | 0,716 | 0,705 | 0,627 | 0,604 | 0,287 | 1,263 | 0,010 |
| 2070 | 0,576 | 0,570 | 0,712 | 0,702 | 0,632 | 0,615 | 0,286 | 1,256 | 0,007 |
| 2080 | 0,575 | 0,565 | 0,709 | 0,698 | 0,630 | 0,620 | 0,287 | 1,245 | 0,010 |
| 2090 | 0,574 | 0,563 | 0,708 | 0,696 | 0,626 | 0,618 | 0,287 | 1,244 | 0,012 |
| 2100 | 0,575 | 0,563 | 0,709 | 0,694 | 0,624 | 0,614 | 0,286 | 1,243 | 0,012 |
| 2150 | 0,576 | 0,566 | 0,710 | 0,697 | 0,625 | 0,613 | 0,287 | 1,247 | 0,012 |

*F1.c táblázat*
Vagyon – alapfutás

| Évtized $t$ | Vagyon(2) $a_2$ | Vagyon(3) $a_3$ | Vagyon(4) $a_4$ | Vagyon(5) $a_5$ | Vagyon(6) $a_6$ | Aggregált vagyon $A_t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1930 | 0,056 | 0,156 | 0 | 0,201 | 0 | 0,092 |
| 1940 | 0,056 | 0,156 | 0 | 0,201 | 0 | 0,092 |
| 1950 | 0,050 | 0,156 | 0 | 0,201 | 0 | 0,090 |
| 1960 | 0,037 | 0,140 | 0 | 0,201 | 0 | 0,084 |
| 1970 | 0,024 | 0,133 | 0 | 0,201 | 0 | 0,080 |
| 1980 | 0,070 | 0,126 | 0 | 0,167 | 0 | 0,081 |
| 1990 | 0,176 | 0 | 0,074 | 0,160 | 0,257 | 0,148 |
| 2000 | 0,070 | 0 | 0,092 | 0,095 | 0,244 | 0,115 |
| 2010 | 0,066 | 0 | 0,118 | 0,130 | 0,199 | 0,121 |
| 2020 | 0,059 | 0 | 0,139 | 0,175 | 0,208 | 0,143 |
| 2030 | 0,054 | 0 | 0,140 | 0,225 | 0,226 | 0,159 |
| 2040 | 0,063 | 0 | 0,137 | 0,239 | 0,250 | 0,170 |
| 2050 | 0,072 | 0 | 0,138 | 0,238 | 0,256 | 0,173 |
| 2060 | 0,072 | 0 | 0,133 | 0,227 | 0,255 | 0,170 |
| 2070 | 0,069 | 0 | 0,129 | 0,215 | 0,250 | 0,164 |
| 2080 | 0,068 | 0 | 0,130 | 0,211 | 0,244 | 0,161 |
| 2090 | 0,068 | 0 | 0,131 | 0,214 | 0,242 | 0,161 |
| 2100 | 0,066 | 0 | 0,129 | 0,216 | 0,243 | 0,162 |
| 2150 | 0,069 | 0 | 0,132 | 0,217 | 0,244 | 0,163 |

*F2.a táblázat*
Nyugdíjak – a skálaszorzók előrelátott csökkentése

| Évtized $t$ | Kezdőnyugdíj $b_t$ | Járulékkulcs $\tau_t$ | IPD/bér $D_t/W_t$ |
|---|---|---|---|
| 1990 | 0,809 | 0,183 | 0,700 |
| 2000 | 0,809 | 0,379 | 0,911 |
| 2010 | 0,756 | 0,387 | 0,941 |
| 2020 | 0,651 | 0,376 | 0,920 |
| 2030 | 0,552 | 0,337 | 0,897 |
| 2040 | 0,468 | 0,287 | 0,875 |
| 2050 | 0,441 | 0,254 | 0,870 |
| 2060 | 0,464 | 0,252 | 0,804 |
| 2070 | 0,485 | 0,266 | 0,677 |
| 2080 | 0,495 | 0,273 | 0,588 |
| 2090 | 0,497 | 0,277 | 0,542 |
| 2100 | 0,493 | 0,278 | 0,540 |

*F2.b táblázat*
Fogyasztás – a skálaszorzók előrelátott csökkentése

| Évtized $t$ | Fogy(2) $c_2$ | Fogy(3) $c_3$ | Fogy(4) $c_4$ | Fogy(5) $c_5$ | Fogy(6) $c_6$ | Fogy(7) $c_7$ | Aggregált megtakarítás $S_t$ | Megtakarítási hányad $\sigma_t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1990 | 0,641 | 0,708 | 0,740 | 0,821 | 0,744 | 0 | 1,132 | 0,070 |
| 2000 | 0,551 | 0,636 | 0,694 | 0,734 | 0,744 | 0,737 | 1,277 | –0,005 |
| 2010 | 0,553 | 0,543 | 0,657 | 0,685 | 0,662 | 0,734 | 1,218 | 0,031 |
| 2020 | 0,576 | 0,543 | 0,637 | 0,644 | 0,614 | 0,649 | 1,245 | 0,050 |
| 2030 | 0,616 | 0,565 | 0,656 | 0,624 | 0,578 | 0,602 | 1,297 | 0,052 |
| 2040 | 0,653 | 0,604 | 0,687 | 0,643 | 0,560 | 0,566 | 1,369 | 0,043 |
| 2050 | 0,668 | 0,640 | 0,706 | 0,674 | 0,577 | 0,549 | 1,421 | 0,031 |
| 2060 | 0,663 | 0,655 | 0,706 | 0,692 | 0,605 | 0,565 | 1,454 | 0,019 |
| 2070 | 0,653 | 0,650 | 0,700 | 0,693 | 0,620 | 0,593 | 1,452 | 0,013 |
| 2080 | 0,649 | 0,641 | 0,695 | 0,687 | 0,621 | 0,608 | 1,435 | 0,014 |
| 2090 | 0,647 | 0,636 | 0,693 | 0,682 | 0,616 | 0,609 | 1,432 | 0,017 |
| 2100 | 0,648 | 0,634 | 0,692 | 0,679 | 0,611 | 0,604 | 1,427 | 0,017 |

*F3.a táblázat*
Népesség és nyugdíjak – előrelátott áttérés bérindexálásról árindexálásra

| Évtized $t$ | Kezdőnyugdíj $b_t$ | Járulékkulcs $\tau_t$ | IPD/Bér $D_t/W_t$ |
|---|---|---|---|
| 1990 | 0,809 | 0,183 | 0,700 |
| 2000 | 0,809 | 0,379 | 0,884 |
| 2010 | 0,756 | 0,355 | 0,914 |
| 2020 | 0,711 | 0,360 | 0,908 |
| 2030 | 0,668 | 0,352 | 0,899 |
| 2040 | 0,631 | 0,333 | 0,889 |
| 2050 | 0,642 | 0,326 | 0,893 |
| 2060 | 0,650 | 0,331 | 0,823 |
| 2070 | 0,657 | 0,336 | 0,774 |
| 2080 | 0,660 | 0,337 | 0,744 |
| 2090 | 0,659 | 0,338 | 0,730 |
| 2100 | 0,656 | 0,338 | 0,738 |

*F3.b. táblázat*

Fogyasztás – előrelátott áttérés bérindexálásról árindexálásra

| Évtized $t$ | Fogy(2) $c_2$ | Fogy(3) $c_3$ | Fogy(4) $c_4$ | Fogy(5) $c_5$ | Fogy(6) $c_6$ | Fogy(7) $c_7$ | Aggregált megtakarítás $S_t$ | Megtakarítási hányad $\sigma_t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1990 | 0,641 | 0,708 | 0,715 | 0,779 | 0,744 | 0 | 1,132 | 0,085 |
| 2000 | 0,565 | 0,636 | 0,706 | 0,709 | 0,707 | 0,737 | 1,309 | 0,005 |
| 2010 | 0,575 | 0,557 | 0,700 | 0,696 | 0,640 | 0,697 | 1,267 | 0,028 |
| 2020 | 0,576 | 0,564 | 0,688 | 0,687 | 0,625 | 0,627 | 1,281 | 0,029 |
| 2030 | 0,588 | 0,565 | 0,704 | 0,675 | 0,616 | 0,612 | 1,289 | 0,023 |
| 2040 | 0,600 | 0,577 | 0,712 | 0,690 | 0,605 | 0,604 | 1,307 | 0,019 |
| 2050 | 0,601 | 0,588 | 0,714 | 0,698 | 0,619 | 0,593 | 1,313 | 0,016 |
| 2060 | 0,596 | 0,589 | 0,712 | 0,700 | 0,626 | 0,607 | 1,320 | 0,012 |
| 2070 | 0,594 | 0,585 | 0,709 | 0,698 | 0,628 | 0,614 | 1,314 | 0,011 |
| 2080 | 0,593 | 0,582 | 0,708 | 0,696 | 0,626 | 0,616 | 1,304 | 0,013 |
| 2090 | 0,593 | 0,581 | 0,707 | 0,694 | 0,624 | 0,614 | 1,306 | 0,014 |
| 2100 | 0,593 | 0,581 | 0,707 | 0,693 | 0,622 | 0,612 | 1,305 | 0,014 |

*F4.a táblázat*

Népesség és nyugdíjak – előrelátott nyugdíjkorhatár-emelés

| Évtized $t$ | Gyermekek $K_t$ | Dolgozók $M_t$ | Nyugdíjasok $P_t$ | Kamattényező $R_t$ | Kezdőnyugdíj $b_t$ | Járulékkulcs $\tau_t$ | IPD/Bér $D_t/W_t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1990 | 1,650 | 3,930 | 1,000 | 1,031 | 0,809 | 0,183 | 0,575 |
| 2000 | 1,525 | 3,790 | 2,000 | 1,029 | 0,809 | 0,379 | 0,724 |
| 2010 | 1,414 | 4,580 | 1,000 | 1,054 | 0,970 | 0,186 | 0,460 |
| 2020 | 1,303 | 4,315 | 1,000 | 1,027 | 0,967 | 0,197 | 0,475 |
| 2030 | 1,205 | 3,994 | 1,000 | 1,025 | 0,964 | 0,212 | 0,476 |
| 2040 | 1,117 | 3,688 | 0,930 | 1,025 | 0,959 | 0,212 | 0,476 |
| 2050 | 1,030 | 3,409 | 0,860 | 1,025 | 0,956 | 0,212 | 0,475 |
| 2060 | 0,952 | 3,155 | 0,790 | 1,025 | 0,992 | 0,218 | 0,476 |
| 2070 | 0,883 | 2,914 | 0,735 | 1,025 | 0,984 | 0,218 | 0,439 |
| 2080 | 0,814 | 2,693 | 0,679 | 1,025 | 0,980 | 0,217 | 0,443 |
| 2090 | 0,752 | 2,493 | 0,624 | 1,025 | 0,978 | 0,215 | 0,448 |
| 2100 | 0,697 | 2,302 | 0,580 | 1,025 | 0,978 | 0,216 | 0,451 |

*F4.b táblázat*

Fogyasztás – előrelátott nyugdíjkorhatár-emelés

| Évtized $t$ | Fogy(2) $c_2$ | Fogy(3) $c_3$ | Fogy(4) $c_4$ | Fogy(5) $c_5$ | Fogy(6) $c_6$ | Fogy(7) $c_7$ | Hagyott örökség $q_t$ | Aggregált megtakarítás $S_t$ | Megtakarítási hányad $\sigma_t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1990 | 0,641 | 0,708 | 0,763 | 0,822 | 0,744 | 0 | 0 | 1,132 | 0,063 |
| 2000 | 0,619 | 0,636 | 0,804 | 0,756 | 0,746 | 0,737 | 0,361 | 1,263 | –0,051 |
| 2010 | 0,722 | 0,651 | 0,955 | 0,846 | 0,795 | 0,784 | 0,525 | 1,080 | 0,061 |
| 2020 | 0,712 | 0,712 | 0,955 | 0,941 | 0,833 | 0,717 | 0,486 | 1,391 | 0,027 |
| 2030 | 0,705 | 0,698 | 0,962 | 0,936 | 0,923 | 0,748 | 0,443 | 1,216 | 0,007 |
| 2040 | 0,705 | 0,691 | 0,947 | 0,943 | 0,918 | 0,828 | 0,406 | 1,195 | –0,006 |
| 2050 | 0,703 | 0,692 | 0,934 | 0,928 | 0,924 | 0,823 | 0,376 | 1,165 | –0,005 |
| 2060 | 0,700 | 0,689 | 0,924 | 0,916 | 0,910 | 0,829 | 0,351 | 1,141 | –0,001 |
| 2070 | 0,700 | 0,686 | 0,924 | 0,906 | 0,898 | 0,816 | 0,350 | 1,129 | 0,003 |
| 2080 | 0,702 | 0,687 | 0,925 | 0,906 | 0,888 | 0,805 | 0,349 | 1,120 | 0,005 |
| 2090 | 0,702 | 0,688 | 0,925 | 0,907 | 0,889 | 0,797 | 0,350 | 1,118 | 0,008 |
| 2100 | 0,701 | 0,688 | 0,925 | 0,907 | 0,889 | 0,797 | 0,350 | 1,121 | 0,006 |

*F5.a táblázat*

Fogyasztás – a skálaszorzók meglepetésszerű csökkentése

| Évtized $t$ | Fogy(2) $c_2$ | Fogy(3) $c_3$ | Fogy(4) $c_4$ | Fogy(5) $c_5$ | Fogy(6) $c_6$ | Fogy(7) $c_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1990 | 0,641 | 0,708 | 0,740 | 0,821 | 0,744 | 0,000 |
| 2000 | 0,551 | 0,636 | 0,717 | 0,734 | 0,744 | 0,737 |
| 2010 | 0,553 | 0,543 | 0,657 | 0,671 | 0,662 | 0,734 |
| 2020 | 0,576 | 0,543 | 0,637 | 0,644 | 0,602 | 0,649 |
| 2030 | 0,616 | 0,565 | 0,656 | 0,624 | 0,578 | 0,591 |
| 2040 | 0,653 | 0,604 | 0,687 | 0,643 | 0,560 | 0,566 |
| 2050 | 0,668 | 0,640 | 0,706 | 0,674 | 0,577 | 0,549 |

*F5.b táblázat*

Fogyasztás – meglepetésszerű áttérés bérindexálásról árindexálásra

| Évtized $t$ | Fogy(2) $c_2$ | Fogy(3) $c_3$ | Fogy(4) $c_4$ | Fogy(5) $c_5$ | Fogy(6) $c_6$ | Fogy(7) $c_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1990 | 0,641 | 0,708 | 0,740 | 0,821 | 0,744 | 0,000 |
| 2000 | 0,551 | 0,636 | 0,717 | 0,734 | 0,744 | 0,737 |
| 2010 | 0,562 | 0,543 | 0,687 | 0,670 | 0,603 | 0,734 |
| 2020 | 0,579 | 0,551 | 0,688 | 0,674 | 0,601 | 0,592 |
| 2030 | 0,592 | 0,568 | 0,705 | 0,674 | 0,605 | 0,589 |
| 2040 | 0,603 | 0,580 | 0,715 | 0,691 | 0,604 | 0,593 |
| 2050 | 0,602 | 0,591 | 0,716 | 0,701 | 0,620 | 0,593 |

*F5.c táblázat*
Fogyasztás – meglepetésszerű korhatáremelés

| Évtized $t$ | Fogy(2) $c_2$ | Fogy(3) $c_3$ | Fogy(4) $c_4$ | Fogy(5) $c_5$ | Fogy(6) $c_6$ | Fogy(7) $c_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1990 | 0,641 | 0,708 | 0,740 | 0,821 | 0,744 | 0,000 |
| 2000 | 0,551 | 0,636 | 0,717 | 0,734 | 0,744 | 0,737 |
| 2010 | 0,735 | 0,744 | 0,965 | 0,927 | 0,865 | 0,629 |
| 2020 | 0,710 | 0,725 | 0,955 | 0,951 | 0,913 | 0,779 |
| 2030 | 0,704 | 0,697 | 0,962 | 0,936 | 0,933 | 0,819 |
| 2040 | 0,704 | 0,690 | 0,945 | 0,943 | 0,918 | 0,836 |
| 2050 | 0,701 | 0,690 | 0,933 | 0,927 | 0,924 | 0,823 |