Közgazdasági Szemle, LVI. évf., 2009. január (1–18. o.)

ORMOS MIHÁLY–URBÁN ANDRÁS–ZOLTÁN TAMÁS

Logoptimális portfóliók empirikus vizsgálata

A logoptimális portfólióelmélet matematikai bizonyítását, valamint empirikus vizsgálatait követően még mindig nem kaptunk választ arra a kérdésre, hogy a stratégia alapján várható hozam mennyivel haladja meg a pénzügyekben egyszerűen csak egyensúlyinak nevezett várható hozamot. E tanulmány alapjául szolgáló kutatás alapvető célja, hogy a matematikai bizonyításon túl olyan empirikus igazolását is adja az említett stratégiának, amely igazolja annak létjogosultságát. A dolgozat legfontosabb eredménye egyrészt az eddig alkalmazott peremfeltételek egyikének, a tranzakciós költségtől mentes kereskedés feltételezésének analitikus elvetése, és a modell ezzel kiegészített újrafogalmazása, másrészt az empirikus vizsgálat, amely a CAPM modellre építve igazolja a kereskedési stratégiában rejlő arbitrázslehetőséget. A vizsgálatokhoz a New York-i tőzsde adatbázisát használtuk.*
Journal of Economic Literature (JEL) kód: G11.

Ebben a tanulmányban a logoptimális portfólióelméletre épülő befektetési stratégia jóságát elemezzük. A logoptimális portfóliók újszerű elmélete a klasszikus módszerektől eltérően nem a tőkepiaci árazási modellből *(Capital Asset Pricing Model, CAPM)* jól ismert kockázatot reprezentáló β kockázati paraméteren keresztül próbálja megmagyarázni a várható hozamot, hanem minden befektetési periódusban egy olyan portfólió meghatározására törekszik, amely a logaritmikus várható hozamot maximalizálja látszólag függetlenül bármilyen kockázati paramétertől, tényezőtől. A logoptimális portfólióstratégiák (lásd *Algoet–Cover* [1988], *Algoet* [1992], *Györfi–Urbán–Vajda* [2007]) a tőke-visszaforgatásos vagyongyarapodás mértékének maximalizálására stacionárus és ergodikus piaci folyamatokat feltételezve, bizonyítottan minden más módszernél alkalmasabbak. Az említett munkák szintézisét és a klasszikus, valamint a logoptimális portfólióelmélet szoros kapcsolatát e lap hasábjain *Ottucsák–Vajda* [2006] mutatta be. Az itt ismertetett eljárások a tőkét dinamikusan kezelik, a portfólióváltoztatás lehetőségét minden kereskedési periódusban fenntartva. Az eddig megjelent írások, amelyek a logoptimális portfólióstratégiák hozamintenzitásának empirikus vizsgálatait mutatták be,

* A szerzők szeretnének köszönetet mondani *Györfi László*nak a kézirat átolvasásért és hasznos tanácsaiért, valamint az anonim bírálónak kiváló javaslataiért, bátorító üzenetéért és alapos munkájáért, amelyek nagyban hozzájárultak az érthetőbb és világosabb és nem utolsósorban komolyabb állításokat megfogalmazó dolgozathoz. Bármilyen, a tanulmányban fellelhető hiba kizárólag a szerzők felelőssége.

Ormos Mihály a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem pénzügyek tanszékének egyetemi docense (e-mail: ormos@finance.bme.hu).

Urbán András a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem pénzügyek tanszékének elsőéves doktorandusz hallgatója, az MTA Sztaki munkatársa (e-mail: urban@finance.bme.hu).

Zoltán Tamás közgazdász, a CIB Bank munkatársa (e-mail: zoltan@finance.bme.hu).

sok olyan egyszerűsítő feltételezésre építettek, amelyek peremfeltételekként nem tűnnek komoly torzításnak a matematikai tétel kimondásakor, annak bizonyításakor, a modell felállításakor. E tanulmány célja kettős.[1]

1. Igazoljuk, hogy a logoptimális stratégia által meghatározott portfólió várható hozama meghaladja a hasonló kockázatú tőkepiaci befektetések segítségével realizálható egyensúlyi hozamot. Ennek igazolására az egyszerű CAPM (lásd *Sharpe* [1964], *Lintner* [1965], *Mossin* [1966]) modellt, valamint a Sharpe-rátát használjuk, amellyel 0,928 értéket mértünk a New York tőzsde kompozit indexének 0,299 értékéhez viszonyítva.

2. Olyan modellt építsünk – az egyszerűsítő feltételezések közül a komoly torzítást hordozó nulla tranzakciós költséget elvetve – a logoptimális portfólióstratégia empirikus vizsgálatait a valósághoz közelítve, amellyel a tranzakciós költségek figyelembe vehetők. Különösen fontos tényezőről van szó egy olyan kereskedési stratégia esetében, amely nap mint nap átrendezi a portfólió összetételét, így hosszabb időtávon meglehetősen nagy tőkét emészt fel a *„vedd meg és tartsd" meg (buy and hold)* stratégiához viszonyítva.

A forgalomarányos tranzakciós költség bevezetése a modellbe olyan újszerű eredmény, amellyel korrigálva a tökéletes piaci feltételezéseket, továbbra is bizonyítható a kereskedési stratégia többletteljesítménye. A feltétel levezetéséhez *Schäfer* [2002] munkájából indultunk ki, itt annak továbbfejlesztett, pontosított változatát mutatjuk be. Az említett empirikus vizsgálataink során már e költségek figyelembevételével meghatározott hozamadatokkal dolgozva jutottunk az említett eredményre, bár hozzá kell tennünk, hogy a megelőző empirikus vizsgálatok hozamaihoz viszonyítva ez már jóval szerényebb. Összességében állítjuk, hogy a logoptimális stratégia segítségével jóval az egyensúlyi hozamot meghaladó hozamot realizálhatunk. Ez az anomália a tőkepiaci hatékonyság erős pilléreit támadja, bár azt sem vetjük el, hogy a csatolt hipotézis, amely szerint létezik egyensúlyi modell (ez esetünkben a CAPM), nem tökéletes, és más paraméterek is szükségesek ennek leírásához, ahogy a *Fama–French* [1993], [1996] háromfaktormodell választ adott a *Basu* [1977] és *Banz* [1981] által feltárt anomáliákra.

Először a logoptimális portfólióelmélet matematikai modelljét és az empirikus stratégiákat mutatjuk be, ezt követően a forgalomarányos tranzakciós költség modellbe történő bevezetését tárgyaljuk. A tanulmány végén közölt empirikus eredmények már az így kiegészített logoptimális portfólióstratégia eredményeit összegzik.

Matematikai modell

Az itt bemutatott értékpapír-piaci modellt alkalmazta többek között a logoptimális portfóliókkal először foglalkozó *Kelly* [1956], továbbá *Latané* [1959], *Breiman* [1961], *Finkelstein–Whitley* [1981], *Algoet–Cover* [1988], *Cover* [1991], valamint *Györfi–Urbán–Vajda* [2007] is. Tegyük fel, hogy a piacon d darab értékpapír áll rendelkezésre, és a tőkénket minden egyes nap elején szabadon átcsoportosíthatjuk a papírok között. Jelölje $\mathbf{x} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}) \in \mathbb{R}_+^d$ a hozamvektort, amelynek j-edik komponense, $x^{(j)} \leq 0$, a j-edik értékpapír záróárainak arányát fejezi ki az adott nap és az azt követő nap között. Azaz $x^{(j)}$ megadja, hogy az adott nap végén a j-edik értékpapírba fektetett egységnyi tőke mennyit ér a következő kereskedési periódus végén. $x^{(j)}$ általában 1-hez közeli érték.

[1] Az eddigi empirikus vizsgálatok során minden esetben arra tett kísérletet a szerző (lásd *Cover* [1991], *Singer* [1997], *Györfi–Lugosi–Udina* [2006], *Györfi–Urbán–Vajda* [2007]), hogy a stratégia eredményeként realizált hozam nagyságát összevesse a portfólióban található legnagyobb hozamot generáló elem hozamával. Ez matematikai szempontból kifogásolhatatlan megoldás, azonban a tradicionális pénzügyekben a hozamot önmagában, annak kockázatosságának figyelembevétele nélkül nem szokás vizsgálni.

A befektető minden egyes kereskedési periódus elején diverzifikálja a tőkéjét egy $\mathbf{b} = (b^{(1)}, \ldots, b^{(d)})$ portfólióvektor szerint. A $\mathbf{b}$ j-edik komponense, $b^{(j)}$ azt határozza meg, hogy a befektető tőkéjének mekkora hányadát fekteti a j-edik értékpapírba. Feltesszük, hogy b portfólióvektor nem negatív komponensekből áll, amelyek összege 1, azaz $\sum_{j=1}^{d} b^{(j)} = 1$. Ez utóbbi feltétel azt jelenti, hogy a befektetési stratégia önfinanszírozó, az előbbi pedig a rövidre eladási *(short)* ügyleteket zárja ki. *Sharpe* [1964] modellje megengedi, hogy a portfólióvektor komponensek összege 1-nél nagyobb legyen, azaz a befektetés egy része hitelből is finanszírozható. Ez a feltételezés azonban megnehezíti az optimális portfólió meghatározását, vagy akár lehetetlenné is teszi a lehetséges portfólióvektorok terének megnövekedése, végtelen mérete miatt, ezért a tanulmányban feltételezzük a stratégia önfinanszírozó voltát.

Jelölje S_0 a befektető kezdeti tőkéjét, ekkor a tőkéje egy nap elteltével

$$S_1 = S_0 \sum_{j=1}^{d} b^{(j)} x^{(j)} = S_0 \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle,$$

ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a skalárszorzatot jelöli.

A piac időbeli alakulását $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \in \mathbb{R}_+^d$ hozamvektorok sorozatával jellemezhetjük. $\mathbf{x}_i$ hozamvektor j-edik komponense, $x_i^{(j)}$ azt mondja meg, hogy az i-edik napi kereskedési periódus előtt a j-edik papírba fektetett egységnyi tőke mennyit ér az i-edik nap végén. Minden $j \le i$ esetén az $\mathbf{x}_j^i$ rövidítést használjuk a hozamvektorok $(\mathbf{x}_j, \ldots, \mathbf{x}_i)$ sorozatára, és jelölje Δ_d az összes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^d$ nem negatív komponensű vektor szimplexét, amely komponenseinek az összege 1. Egy $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots\}$ *befektetési stratégia* függvények egy sorozata

$$\mathbf{b}_i : (\mathbb{R}_+^d)^{i-1} \to \Delta_d, \quad i = 1, 2, \ldots$$

úgy, hogy $\mathbf{b}_i(\mathbf{x}_1^{i-1})$ jelöli a befektető által az i-edik napra a piac korábbi viselkedése alapján választott portfólióvektort.[2] Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a következő jelölést használjuk: $\mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1}) = \mathbf{b}_i(\mathbf{x}_1^{i-1})$.

Az S_0 kezdeti tőkéből kiindulva az n-edik nap végén a $\mathbf{B}$ befektetési stratégia által elért tőke

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n} \left\langle \mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1}), \mathbf{x}_i \right\rangle = S_0 e^{\sum_{i=1}^{n} \ln \left\langle \mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1}), \mathbf{x}_i \right\rangle} = S_0 e^{n W_n(\mathbf{B})},$$

ahol $W_n(\mathbf{B})$ a növekedési ráta (kamatszinten vett átlagos hozam):

$$W_n(\mathbf{B}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \left\langle \mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1}), \mathbf{x}_i \right\rangle. \tag{1}$$

[2] Feltételezzük, hogy a piacon a hozamvektorok rejtett sztochasztikus kapcsolatban állnak az időben őket megelőző hozamokkal.

A logoptimális portfólióstratégia

Térjünk vissza az (1) kifejezéshez! Nyilvánvalóan az n-edik napig elért vagyon, azaz $S_n = S_n(\mathbf{B})$ maximalizálása ekvivalens $W_n(\mathbf{B})$ átlagos növekedési ráta maximalizálásával. A következőkben bemutatjuk a logoptimális befektetési stratégiákat, amelyek alkalmazásával a befektető maximalizálhatja a növekedési rátát.

Feltételek. Ahhoz, hogy elemzéseink elvégezhetők legyenek, a következő egyszerűsítő feltételeket használjuk a logoptimális portfólióelméletben, amelyeken a későbbiekben enyhítünk:

1. a részvények között a tőke bármekkora mértékben szétosztható;
2. a részvényekből korlátlan mennyiség áll a rendelkezésünkre az aktuális (napi) áron, azaz tetszőlegesen kevés vagy sok részvényt tudunk venni vagy eladni;
3. nincs tranzakciós költség;
4. a befektető tranzakciói nincsenek hatással a piac viselkedésére.[3]

Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ az $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$ véletlen valószínűségi változók realizációja, amelyek egy vektorértékű stacionárius és ergodikus folyamatot $\{\mathbf{X}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ alkotnak. E feltételek mellett vizsgálta például *Breiman* [1961], *Algoet–Cover* [1988] korábban a portfólióválasztási problémát.

Logoptimális portfólió. *Algoet–Cover* [1988] által meghatározott alapvető korlátok rámutattak, hogy az úgynevezett *logoptimális portfólió* $\mathbf{B}^* = \{\mathbf{b}^*(\cdot)\}$ az átlagos növekedési rátát maximalizáló választás. Az n-edik kereskedési periódusban jelölje $\mathbf{b}^*(\cdot)$ a logoptimális portfóliót:

$$\mathbf{b}^*(\mathbf{X}_1^{n-1}) = \arg\max_{\mathbf{b}(\cdot)} \mathbb{E}\{\ln\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{n-1}), \mathbf{X}_n \right\rangle \mid \mathbf{X}_1^{n-1}\}, \tag{2}$$

ahol $\mathbb{E}\{\cdot \mid \mathbf{X}_1^{n-1}\} = \mathbb{E}\{\cdot \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_{n-1}\}$ a múltbeli hozamvektorok alapján kiszámított feltételes várható érték.

Ha általános esetben $S_n^* = S_n(\mathbf{B}^*)$ jelöli a $\mathbf{B}^*$ logoptimális portfólióstratégiával elért vagyont n nap után, akkor minden tetszőleges $\mathbf{B}$ befektetési stratégia által elért $S_n = S(\mathbf{B})$ tőkére és tetszőleges $\{\mathbf{X}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ stacionárius és ergodikus folyamatra

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{S_n}{S_n^*} \le 0 \quad \text{1 valószínűséggel}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln S_n^* = W^* \quad \text{1 valószínűséggel,}$$

ahol

$$W^* = \mathbb{E}\{\ln\left\langle \mathbf{b}^*(\mathbf{X}_{-\infty}^{-1}),\, \mathbf{X}_0 \right\rangle\}$$

a lehetséges befektetési stratégiák által elérhető maximális növekedési ráta. Vagyis (1 valószínűséggel) egyetlen befektetési stratégia sem képes W^*-nál nagyobb növekedési ráta elérésére.

[3] Feltételezzük, hogy a piac nem hatékony. Amennyiben a befektető vagyona marginális a piac teljes kapitalizációjához képest, a feltétel a gyakorlatban is közel érvényes lehet.

Itt jegyezzük meg: a $\mathbf{b}^*$ (2) definíciójából következik, hogy független azonos eloszlású piacokon a $\mathbf{b}^*$ logoptimális portfólió konstans, mivel

$$\mathbf{b}^* = \arg\max_{\mathbf{b}(\cdot)} \mathbb{E}\{\ln\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{n-1}), \mathbf{X}_n\rangle \mid \mathbf{X}_1^{n-1}\} = \arg\max_{\mathbf{b}} \mathbb{E}\{\ln\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_n\rangle\}. \quad (3)$$

Ez akkor lehet fontos, ha az $\{\mathbf{X}_i\}$ piaci folyamat emlékezetmentes.[4] Amennyiben *a priori* ismeretünk van a piaci háttér folyamatának eloszlásáról, akkor többlethozamra tehetünk szert.

Ottucsák–Vajda [2006] belátta, hogy a logoptimális portfóliók közelíthetők a klasszikus módszerekkel hasonló módon történő portfólióválasztással, ahol az optimális portfólió kialakítása az $\mathbb{E}\{\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_n\rangle\}$ várható hozam és $\mathrm{Var}\{\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_n\rangle\}$ kockázat alapján történik egy a várható hozamtól függő kockázat elutasítási tényező szerint.

Empirikus stratégiák

Itt a *Györfi–Lugosi–Udina* [2006] által bevezetett magfüggvényalapú stratégiát mutatjuk be, amelynek a legegyszerűbb, egyenletes magfüggvénynek megfelelő, „mozgó ablakos” változatát ismertetjük. A módszer alapelve, hogy a közelmúlthoz „hasonló” mintákat keres a tőkepiac múltjában, és ezek alapján becslést készít a másnapi árfolyamokra, amely szerint maximalizálja a portfóliót. Vagyis egy olyan módszert vezetünk be, amely a múltbeli megfigyelések alapján empirikus becslést ad egy portfólió feltételes logaritmikus várható hozamára.

A stratégiához definiáljuk a *szakértők*[5] egy végtelen osztályát $\mathbf{H}^{(\ell)}\{\mathbf{h}^{(\ell)}(\cdot)\}$-t, ahol ℓ pozitív egész. Minden fix ℓ pozitív egészhez válasszunk egy sugarat, amire igaz $r_\ell > 0$ úgy, hogy

$$\lim_{\ell\to\infty} r_\ell = 0.$$

Ekkor minden $n > 1$ esetén definiáljuk $\mathbf{h}^{(\ell)}$ szakértőt a következőképpen. Legyen J_n az illeszkedések helyét tartalmazó halmaz:

$$J_n = \{i < n : \| \mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{n-1} \| \le r_\ell\},$$

ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi normát jelöli.

A fentiek alapján egy $\mathbf{h}^{(\ell)}$ szakértő által meghatározott magfüggvényes logoptimális portfólió az n-edik befektetési napra legyen[6]

$$\mathbf{h}^{(\ell)}(\mathbf{x}_1^{n-1}) = \arg\max_{\mathbf{b}\in\Delta_d} \sum_{\{i\in J_n\}} \ln\langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_i\rangle, \quad (4)$$

ha a szumma nem üres, különben pedig válasszuk az egyenletes $\mathbf{b}_0 = (1/d, \ldots, 1/d)$ portfóliót.

Informálisan ez a következőképpen fogalmazható meg a korábbiak szerint. A befektető az n-edik kereskedési napra, a (2) kifejezés alapján, olyan portfóliót választana, amely maximalizálja a logaritmikus feltételes várható tőkenövekedést az n-edik napot megelőző napok árfolyamadatainak ismeretében. A (4) kifejezés ezen maximalizálás empirikus

[4] Vagy olyan esetben, amikor nem vagyunk képesek a piaci folyamat feltételes eloszlásának becslésére.

[5] Szakértőknek az elemi stratégiákat nevezzük. A magfüggvényalapú stratégiát a szakértők kombinálásával kapjuk. Részletesen lásd később.

[6] A magfüggvényalapú módszerrel meghatározott portfóliókat a megkülönböztethetőség érdekében $\mathbf{b}$ helyett $\mathbf{h}$ betűvel jelöljük.

közelítése. A magfüggvényalapú illeszkedés kereső algoritmus az n-edik nap múltjához „hasonló” hozamvektor-sorozatokat keres a múltban, és a „hasonló” sorozatokat követő hozamvektorokat, mint $\mathbf{X}_n$ empirikus becsléseit eltárolja. Később ezek az eltárolt elemek kerülnek felhasználásra a maximalizálás során. A portfólióválasztáshoz (2) alapján a logaritmikus feltételes várható tőkenövekedés meghatározása szükséges, amire – mivel $\mathbf{X}_n$ feltételes eloszlását nem ismerjük – ezen elemeket felhasználva tudunk empirikus becslést adni. A hasonlóság mértéke jelen esetben a vektorok euklideszi távolsága.

Mivel előre nem tudhatjuk, hogy melyik (ℓ) fog optimális r_ℓ sugarat meghatározni,[7] vagyis a hasonlónak tekintett hozamvektorok egy ideális halmazát felhasználni, a szakértők között szét kell osztanunk a rendelkezésre álló vagyonunkat. A magfüggvényalapú stratégiát a $S_n(\mathbf{H}^{(\ell)})$-beli szakértők kombinálásával kapjuk, felhasználva egy $\{q_\ell\}$ valószínűségi eloszlást, amely minden pozitív egész (ℓ) halmazán értelmezett úgy, hogy (ℓ), $q_\ell > 0$. Ha $S_n(\mathbf{H}^{(\ell)})$ a $\mathbf{H}^{(\ell)}$ elemi stratégiák által összegyűjtött tőke az n-edik periódus után és a kezdeti tőke $S_0 = 1$, az n-edik nap utáni vagyont a szakértők egyszerű súlyozásával a következőképpen kapjuk:

$$S_n(\mathbf{B}) = \sum_\ell q_\ell S_n(\mathbf{H}^{(\ell)}) . \tag{5}$$

A szakértők egyfajta szereplőknek is tekinthetők, amelyek a saját paramétereiknek megfelelő empirikus logoptimális stratégia szerint gazdálkodnak. Később az összesen elért összvagyont a szereplők vagyonának összegeként kapjuk, amely összeg attól függ, hogy a kezdeti vagyonunkat milyen arányban osztottuk szét.

Forgalomarányos tranzakciós költség

A klasszikus logoptimális portfólióelmélet azon feltevéssel él, hogy az értékpapír-kereskedés során nincsen tranzakciós költség. Ez a feltételezés azonban ellentmond a valós kereskedés általános feltételeinek, mivel a brókerdíjak és a szabályozott kereskedés folytonossága érdekében felszámított jutalékok járulékos költségekkel terhelik meg a tőzsdei ügyleteket. Ahhoz, hogy a logoptimális stratégiák empirikus eredményei összevethetők legyenek a korábban ismertetett módszerek eredményeivel, a tranzakciós költségek figyelembevétele elkerülhetetlen. Mivel a logoptimális stratégiák a portfóliót gyakran változtathatják, a kereskedés járulékos költségei az eredményeket nagyságrendekkel csökkenthetik.

A brókercégek a tranzakciós költség számítását különbözőképpen végezhetik. Felszámolhatnak teljesült tranzakciónként rögzített díjat, vagy az ügylet volumenével arányos, úgynevezett forgalomarányos vagy proporcionális tranzakciós költséget. Megjegyezzük, hogy a forgalomarányos tranzakciós költséget alkalmazó brókercégek egy bizonyos értéknél kisebb volumenű tranzakciók esetében többnyire szintén rögzített díjjal dolgoznak, vagy a rögzített díjakat és a proporcionális elvet együtt alkalmazzák. A következőkben a forgalomarányos tranzakciós költség logoptimális modellekbe építésének lehetőségét mutatjuk be azzal a feltevéssel, hogy nincs fix költségtényező. Ez a feltevés helyes egy olyan proporcionális költségszámítást alkalmazó rendszerben, ahol a kereskedési volumenek akkorák, hogy rájuk már mindig a forgalomarányos költségszámítás érvényes.

Ezek után módosítsuk korábban ismertetett feltételeink 3. pontját a logoptimális portfólióelmélet forgalomarányos tranzakciós költséggel kiegészített változatára a következő módon: van forgalomarányos tranzakciós költség, azonban nincs fix költségtényező.

[7] Optimalitáson azt értve, hogy az adott sugarat választó szakértő olyan portfóliókat választ, hogy a befektetés által elért vagyon maximális legyen.

A forgalomarányos költségszámítás modelljének felépítéséhez a logoptimális portfóliók matematikai modelljéből indulunk ki. Az általunk létrehozott új proporcionális költségszámítási modell *Schäfer* [2002] modelljének továbbfejlesztett, pontosított változata, amely az eredeti modellel szemben alkalmas a költségek közvetlen meghatározására.

A kereskedés kezdetén S_0 kezdőtőkéből indulunk ki és S_n az n-edik kereskedési napig elért vagyon. A befektető egy új $(n + 1)$-edik kereskedési periódus előtt az aktuálisan meghatározott $\mathbf{b}_{n+1}$ portfólióvektora szerint részvényadásvétellel kialakítja az $(n + 1)$-edik napi portfólióját. Mivel a kereskedés jelen esetben járulékos költségeket von maga után, a befektető a forgalom arányában tranzakciós költséget fizet, ezért az $(n + 1)$-edik periódus előtt a $\mathbf{b}_{n+1}$ portfólió szerint átrendezett nettó N_n vagyona nem nagyobb, mint az átrendezés előtti bruttó S_n. Mivel az n-edik befektetési nap elején a kezdőtőke N_{n-1}, ezért a fenti jelöléseket használva, a bruttó S_n vagyon ekkor az n-edik kereskedési nap végén

$$S_n = N_{n-1}\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x}_n \rangle. \tag{6}$$

Az egy részvényre vetített arányos tranzakciós költség hányadát jelölje $0 < c_s < 1$ és $0 < c_p < 1$, azaz 1 egységnyi részvény eladásából csak $1 - c_s$ egység jövedelmünk származik, míg 1 pénzegységért $1 - c_p$ egységnyi részvényt tudunk vásárolni. [Az s az eladást *(sell)*, a p a vásárlást *(purchase)* jelöli.]

Mivel a vagyonunkat a kereskedés során mindig részvényekbe fektetjük, az eladásból befolyó pénzt rögtön újabb részvény vásárlására fordítjuk. Tudjuk, hogy a stratégia önfinanszírozó, azaz csak annyi pénzből tudunk vásárolni, amennyi az eladás során befolyt. Vezessük le, hogy az eladás majd a vásárlás során fizetendő tranzakciós költség levonása után mekkora nettó N_n vagyonunk marad.

A tőkeátrendezés megkezdése előtt minden vagyonunkat részvényekbe fektettük. Ha nem történik részvényeladás, vásárolni sem tudunk, ekkor tranzakciós költség sem fizetendő. A tőkeátcsoportosítás előtt a j-edik részvényben tartott tőke $b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1}$ pénzegységet ér, azaz a kiinduló nettó N_{n-1} vagyon megszorozva azzal, hogy a j-edik részvény e vagyon mekkora $b_n^{(j)}$ részét tette ki, illetve a részvény árfolyama milyen $x_n^{(j)}$ arányban változott az $(n - 1)$-edik és az n-edik kereskedési nap vége között. Határozzuk meg, hogy a b_{n+1} portfólió választása esetén mennyi részvényt adunk el. Tudjuk, hogy a j-edik részvényben tartott tőke $b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1}$ pénzegységet ér az átcsoportosítás előtt, míg jelenleg $b_{n+1}^{(j)}N_n$ egységnyire van szükségünk. Ha $b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} > b_{n+1}^{(j)}N_n$, akkor a részvények egy részének eladása szükséges, ahol a j-edik részvény eladása után fizetendő tranzakciós költség

$$c_s(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)}N_n).$$

x^+ jelölje x pozitív részét. Ekkora az eladások után fizetendő tranzakciós költségek összege

$$\sum_{j=1}^{d} c_s(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)}N_n)^+. \tag{7}$$

Ez azt jelenti, hogy miután meghatároztunk egy portfólióvektort, és végrehajtottuk a módszer által javasolt részvényeladásokat, az ügylet végrehajtása után maradt részvényünk (ha minden részvényünket eladtuk ez a mennyiség nulla) és az eladásból származó pénzeszközünk is. Ezenfelül a brókernek a befolyó pénzből az itt meghatározott mértékű tranzakciós költséget fizettünk a részvényeladások után.

Mivel a rendelkezésre álló vagyon egészét részvényekbe fektetjük, az eladásból befolyt szabadon felhasználható pénzmennyiséget új vásárlásokra fordítjuk, erre az eladásból befolyt bevétel tranzakciós költséggel csökkentett hányada áll rendelkezésre, ami

$$\sum_{j=1}^{d} \{(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)}N_n)^+ - c_s(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)}N_n)^+\}.$$

Azaz minden részvényre összegezzük, hogy ha eladás történt, akkor a tranzakcióból mekkora pénzösszeg folyt be, valamint a befolyt összegből mekkora mennyiséget kellett költségként megfizetni. Amit így kapunk, az a vásárlásra szabadon felhasználható pénzmennyiség, amelyet a leírtak szerint teljes egészében új részvény beszerzésére használunk fel.

Ha egy ekkora összeget fordítunk új értékpapírok vásárlására, akkor ez után

$$\sum_{j=1}^{d} c_p\{(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)}N_n)^+ - c_s(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)}N_n)^+\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{d}\{(c_p - c_p c_s)(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)}N_n)^+\} \tag{8}$$

költség fizetendő. Az összesen eddig kifizetett költség (7) és (8) összege

$$\sum_{j=1}^{d}\{(c_p + c_s - c_p c_s)(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)}N_n)^+\}.$$

Mindez azt jelenti, hogy a tőkeátrendezés e periódusában a vásárlásra szánt pénzösszeget teljes egészében elköltöttük. Részben a már meglévő részvényállományunkat bővítettük újabb értékpapírokkal, részben pedig a vásárolt mennyiséggel arányosan növeltük az eddig megfizetett költségek mennyiségét.

Az eddigiek alapján tehát az eladásból származó jövedelem költségekkel (eladás és vásárlás után egyaránt kifizetett összköltség) csökkentett hányadával megegyező értékben tehetünk szert új értékpapírokra, azaz

$$\sum_{j=1}^{d}\{(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)}N_n)^+ - (c_p + c_s - c_p c_s)(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)}N_n)^+\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{d}\{(1 - c_p - c_s + c_p c_s)(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)}N_n)^+\}$$

értékben.

Az eladáshoz hasonlóan, ha $b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} < b_{n+1}^{(j)}N_n$ a j-edik részvényből vásárolunk. A vásárlás összesen

$$\sum_{j=1}^{d}(b_{n+1}^{(j)}N_n - b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1})^+$$

értékben történik. Ezzel az értékkel kell tehát megegyeznie a részvényeladásból befolyt, költségekkel csökkentett összegnek. Felírható tehát a következő egyenlet:

$$\sum_{j=1}^{d}(b_{n+1}^{(j)}N_n - b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1})^+ =$$

$$= \sum_{j=1}^{d}\{(1 - c_p - c_s + c_p c_s)(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)}N_n)^+\}, \tag{9}$$

azaz (vásárlásra elkölthető pénzösszeg = eladásból realizált pénzösszeg – költségek).

Felhasználva az

$$(a - b)^+ = a - b + (b - a)^+$$

azonosságot, adódik továbbá, hogy

$$\sum_{j=1}^{d}(b_{n+1}^{(j)}N_n - b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1})^+ =$$

$$= \sum_{j=1}^{d}(b_{n+1}^{(j)}N_n - b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1}) + \sum_{j=1}^{d}(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)}N_n)^+.$$

Mivel $\sum_{j=1}^{d}(b_{n+1}^{(j)}N_n) = N_n$ és $\sum_{j=1}^{d}(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1}) = S_n$, ezért

$$\sum_{j=1}^{d}(b_{n+1}^{(j)}N_n - b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1})^+ = N_n - S_n + \sum_{j=1}^{d}(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)}N_n)^+.$$

Ezek alapján (9) felírható a következőképpen:

$$N_n - S_n + \sum_{j=1}^{d}(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)}N_n)^+ =$$

$$= \sum_{j=1}^{d}\{(1 - c_p - c_s + c_p c_s)(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)}N_n)^+\}. \tag{10}$$

A leírtak alapján tehát a bruttó S_n tőke felbontható a nettó N_n vagyon és a költségek összegére.

$$S_n = N_n + (c_p - c_p c_s + c_s)\sum_{j=1}^{d}\{(b_n^{(j)}x_n^{(j)}N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)}N_n)^+\}. \tag{11}$$

Osszuk el mindkét oldalt S_n-nel, és jelölje w_n a következő arányt:

$$w_n = \frac{N_n}{S_n},$$

ahol automatikusan mindig fennáll, hogy $0 < w_n < 1$. Ekkor (11) alapján (6)-ot felhasználva megkapjuk az

$$1 = w_n + (c_p - c_p c_s + c_s)\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{b_n^{(j)}x_n^{(j)}}{\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x}_n \rangle} - b_{n+1}^{(j)}w_n\right)^+ \tag{12}$$

egyenletet. A (12) egyenletet megvizsgálva, látható, hogy tetszőleges $\mathbf{b}_n$ és $\mathbf{b}_{n+1}$ portfólióvektorokhoz és $\mathbf{x}_n$ hozamvektorhoz létezik egy egyértelmű $w_n \in [0, 1)$ költségtényező, ahol az n-edik napra w_n a $\mathbf{b}_n$ és $\mathbf{b}_{n+1}$, valamint $\mathbf{x}_n$ függvénye, azaz

$$w_n = w(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}, \mathbf{x}_n).$$

A (12) egyenletből következik továbbá, hogy ha a részvények között a tőkét nagymértékben kívánjuk átcsoportosítani, a nettó vagyon nagymértékben csökkenhet. Megjegyeznénk még, hogy a tranzakciós költség nem korlátozza a választható portfólióvektorok halmazát, az optimalizáló eljárás továbbra is a teljes Δ_d szimplexen keres, ugyanis egy jelentős átcsoportosítás a magas költségek ellenére jelenthet optimális változtatást.

Amennyiben a kialakult portfólión nem változtatunk az n-edik napon, a (12) kifejezésben a szumma utáni tag értéke 0, azaz $w_n = 1$. Ha a tőkeátcsoportosítás a legnagyobb mértékű, a szumma utáni tag értéke 1 és $w_n = (1 - c_p - c_s + c_p c_s)$. A fentiekből következik, hogy w_n értéke a következő tartományban keresendő:

$$1 - c_p - c_s + c_p c_s \leq w_n \leq 1.$$

Ha feltesszük, hogy $c = c_p = c_s$, ami legtöbb brókercégnél fennálló feltétel, ez a tartomány:

$$(1 - c)^2 \leq w_n \leq 1.$$

Mivel w_n nem írható fel zárt alakban – csak a (12) egyenlet megoldásával kapható meg –, ezek a feltételek nagyon fontosak a megoldáskeresési tartomány meghatározása szempontjából.

Amennyiben a kezdőtőkénk $S_0 = 1$ és $w_0 = 1$, az n-edik kereskedési nap végére elért S_n vagyon mértéke a következőképpen számolható:

$$S_n = N_{n-1}\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x}_n \rangle = w_{n-1}S_{n-1}\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x}_n \rangle = \prod_{i=1}^{n}[w(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_{i-1})\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle],$$

azaz a tranzakciós költségek levonása az aktuális S bruttó vagyon w költségtényezőkkel való szorzását jelenti. Az átlagos növekedési ráta a tranzakciós költség figyelembevételével jelen esetben

$$W_{n,c>0}(\mathbf{B}) = \frac{1}{n}\ln S_n .$$

A befektető célja e ráta maximalizálása. A Matematikai modell című alfejezetben bemutattuk, hogy tranzakciós költség nélkül a befektető a korábbi hozamvektorok függvényében miként próbálhatja meg maximalizálni a növekedési rátát, miként választhat optimális portfóliót. Amennyiben nincs tranzakciós költség, a befektető a

$$W_{n,c=0}(\mathbf{B}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\langle \mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1}),\ \mathbf{x}_i \rangle$$

kifejezést igyekszik maximalizálni, ahol **B** egy olyan piacon alkalmazott befektetési stratégia, ahol nincsennek a kereskedésnek járulékos költségei. Ennek analógiájára egy olyan befektetési stratégia W_n növekedési rátáját, amelyben a portfólióvektorokat szintén a piac korábbi viselkedése alapján határozzuk meg, és létezik tranzakciós költség

$$W_{n,c>0}(\mathbf{B}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\{w(\mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-2}),\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1}),\ \mathbf{x}_{i-1})\langle \mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1}), \mathbf{x}_i \rangle\}$$

módon írhatjuk fel.

Empirikus stratégiák tranzakciós költséggel

Korábban bemutattuk, hogy a logoptimális stratégiáknál analitikusan bizonyítottan nem rendelkezik egyetlen stratégia sem nagyobb tőkenövekedési rátával. Ismertettük, hogyan határozhatók meg elvben és gyakorlatban a magfüggvényes eljárás használatával a logoptimális portfólióvektorok. A következőkben a $W_{n,c>0}(\mathbf{B})$-t maximalizáló empirikus stratégia megalkotásához kiterjesztjük a korábban elmondottakat.

Egylépéses optimalizáció. A korábban bevezetett jelöléseket alkalmazva módosítjuk az ott ismertetett modelleket. Olyan szakértőket vezetünk be, amelyek az n-edik napi portfólióoptimalizáció során figyelembe veszik az $(n - 1)$-edik napra választott portfóliót, azt, hogy az új portfólió mekkora tőkemozgatással, ezáltal mekkora pluszköltségekkel járna.

Mint arról korábban szóltunk, a fenti kifejezés a logaritmikus feltételes várható tőkenövekedés empirikus közelítése. Célunk, hogy az új szakértők olyan portfóliókat válasszanak, amelyek a következő napra várható tőkenövekedést – amely jelen esetben az egyes részvényeken elért árfolyamnyereség és a fizetendő költség különbsége – maximalizálják úgy, hogy ismerik a piaci hozamvektorok múltbeli értékeit és a vagyonátrendezés járulékos költségeit a választandó portfólió függvényében.

Ezek alapján tranzakciós költséget figyelembe vevő empirikus $\mathbf{H}^{(\ell)}_{c>0} = \{\mathbf{h}^{(\ell)}_{c>0}(\cdot)\}$ magfüggvényes logoptimális szakértőket definiáltuk, ahol

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{h}^{(\ell)}_{c>0}(\mathbf{x}_1^{n-1}) = \arg\max_{\mathbf{b}'\in\Delta_d} \sum_{\{i\in J_n\}} \ln\{w(\mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}', \mathbf{x}_{i-1})\langle \mathbf{b}', \mathbf{x}_i\rangle\}.$$

Egy empirikus egylépéses optimalizációt használó logoptimális $\mathbf{B}^{\mathrm{EO}}$ stratégia ezen szakértők Empirikus stratégiák című pontban ismertetett módon történő kombinációja. A módszer egylépéses abból a szempontból, hogy nem a globális optimumot jelentő portfólió választására törekszik, hanem csak a következő napon elérhető várható tőkenövekedést maximalizálja, amely választások csak a tranzakciós költség nélküli esetben vezetnek globális optimumhoz. Ez azt jelenti, hogy ez módszer csak közelíti az optimális $W_{n,c>0}$ növekedési rátát, de az empirikus eredmények azt mutatják, hogy ez az eljárás is képes figyelemreméltó teljesítmény elérésére. Megjegyezzük, hogy ha a piaci háttérfolyamatról feltehető, hogy rendelkezik Markov-tulajdonsággal, létezik egy elvi megoldás, amely alkalmas a globális optimumot jelentő portfóliók meghatározására tranzakciós költségek figyelembevételével is (lásd *Györfi–Vajda* [2008]).

Empirikus eredmények

A fejezet az általunk bemutatott elméleti módszerek alapján végzett empirikus vizsgálatok eredményeit foglalja össze. Az eljárások adatfüggő elemzésébe a New York-i Értéktőzsdén jegyzet 23 vállalat részvényeit vontuk be. Azokat a szakirodalom által korábban elemzett részvényeket vizsgáltuk, amelyekről rendelkezésre áll hozaminformáció az általunk figyelt 1991 és 2005 közötti időszakban. Az elemzési portfóliót a következő vállalatok részvényei alkotják: Alcoa Inc., Altria Group Inc., Coca-Cola Co., Commercial Metals Co., Dow Chemical Co., EI DuPont de Nemours & Co., Ford Motor Co., Fortune Brands, General Electric Co., General Motors Corp., Hewlett-Packard Co., IBM Corp., Ingersoll-Rand Co. Ltd., Johnson & Johnson, Kimberly-Clark Corp., Eastman Kodak Co., Merck & Co. Inc., 3M Co., N. American Galvanizing Co., Procter & Gamble Co., Schlumberger Limited, Sherwin-Williams Co.), Wyeth.

Módszertan. A kockázatmentes értékpapír r_f kamatlába az egy hónapos futamidejű U.S. Treasury Bond logaritmikus kamata, amelynek forrása az Ibbotson and Associates Inc. adatbázisának *Kenneth R. French* által készített kivonata.[8] A vizsgált tőkepiac a New York-i Értéktőzsde, a piaci portfólió értékének mérésére a tőzsde kompozit indexét *(NYSE Composite Index)* alkalmazzuk. Az elemzés 15 éves intervallumra terjed ki. A tranzakciós költséget $c = 0{,}1$ százalékban állapítottuk meg, amely az európai intézményi befekte-

[8] http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/datalibrary.html.

tők számára elérhető. Feltesszük, hogy a felhasznált tőke mérete miatt nincs fix költségtényező. A logoptimális stratégia vizsgálatához a sokrészvényes portfóliók esetén – korábbi tapasztalataink alapján – a fejezetben a magfüggvényes logoptimális szakértők $\bigcup_{\ell=1}^{\ell=10}\{\mathbf{H}^{(\ell)}\}$ halmazát használjuk. A logoptimális stratégia teljesítményét a 10 darab szakértő teljesítményének számtani átlagaként határozzuk meg, ahol a szakértők között a tőkét egyenletes eloszlás szerint osztjuk szét, azaz $q_\ell = 1/10$, minden ℓ esetén.

Az empirikus vizsgálat célja a piaci portfóliót tartó (NYSE Composite) passzív stratégia és a logoptimális aktív stratégiák eredményességének összehasonlítása. A módszerek teljesítményének értékelésére a tőkejavak árazódási modelljét (CAPM) és az empirikus Sharpe-rátát használjuk, amelyet az i-edik portfólióhoz a következőképpen definiálunk:[9]

$$SR_i = \frac{\sum_{t=1}^{T}(r_i^t - r_f^t)}{s\{r_i\}}, \tag{13}$$

ahol T a vizsgált évek száma, jelen esetben 13, r_i^t az i-edik portfólió hozama a t-edik évben, r_i^t a kockázatmentes kamatláb a t-edik évben, $s\{r_i\}$ pedig az i-edik portfólió éves hozamainak empirikus szórása.

Az

$$r_i^t - r_f^t = \alpha_i + \beta_i(r_m^t - r_f^t) + \varepsilon_i^t, \tag{14}$$

egyenlet alapján felírva az $r_i^t - r_f^t$ kockázati prémium várható értékének becslésére szolgáló

$$\mathbb{E}\{r_i - r_f\} = \alpha_i + \beta_i\mathbb{E}\{r_m - r_f\} \tag{15}$$

összefüggést, meghatározzuk a tőkejavak közismert árazódási modelljét. A tőkepiaci árazási modell (CAPM) alapján becslést adhatunk egy értékpapír vagy portfólió várható hozamára, amely a befektetés regresszió alapján meghatározott β paraméterének függvénye. Hatékony piacot feltételezve (ahol $\alpha_i = 0$ minden i-re) a portfólió várható hozama csak a CAPM által a portfólióhoz tartozó β alapján meghatározott érték lehet. Kézenfekvő lehetőség a logoptimális stratégia hozamának magyarázatára felépíteni egy CAPM modellt, majd megvizsgálni, hogy eltér-e egymástól a modell által becsült elméleti várható érték és a logoptimális portfólióstratégia átlagos hozama. Amennyiben a logoptimális stratégia átlagos hozama szignifikánsan alulmúlja a CAPM alapján várható hozamot, a stratégia létjogosultsága kérdőjelezhető meg, míg fordított esetben empirikusan sikerül igazolni, hogy a logoptimális portfóliók abnormális hozamok elérésére képesek.

A vizsgálatban kihasználjuk, hogy a β-értékek átlagolhatók, és a modell használhatóságának feltételezésével időben – legalább – középtávon stabilak. Mivel hosszú távú stabilitásuk az eredmények alapján nem tételezhető fel, ezért a pontosság növelése érdekében a vizsgált 15 évet három egyenlő szakaszra bontottuk és a modellt minden ötéves szakaszra újra létrehoztuk.

Egy portfólió β_p-je a portfólióban részt vevő értékpapírok β-jának súlyozott átlagaként határozható meg. E tulajdonságok alapján tehát egy logoptimális stratégia β_{logopt} értéke meghatározható a portfóliót alkotó részvények β-áinak súlyozott átlagaként, ahol a sú-

[9] *Sharpe* [1994] megállapítása alapján a kockázatmentes hozamot mi is időben változónak tekintjük.

lyokat a vizsgált időszakban megfigyelhető napi portfóliók alapján határozzuk meg minden részvényre (a napi **b** portfólióvektorok átlagaként az ötéves intervallumra).

A lineáris regressziós modell havi hozamadatok alapján került meghatározásra, hogy az adatok közti nem kívánt autokorreleációt és a heteroszkedaszticitást kiküszöböljük, valamint a regressziós hibatagok kívánt tulajdonságait, a független, 0 várható értékű normális eloszlást elérjük.

A lineáris regressziós együtthatók meghatározása (15) összefüggés alapján történt a legkisebb négyzetek módszerével. Az ötéves periódusok minden *i*-edik részvényéhez tartozó $\overline{\alpha}_i$ és $\overline{\beta}_i$ értékeit a vizsgálattal megegyező időszakokban mért havi hozamok alapján határoztuk meg.

Az *1. táblázatban* e módszerrel bemutatott módon meghatároztuk a vizsgált időszak három egyenlő intervallumának $\overline{\beta}$-ait ($\overline{\beta}_{91-95}$, $\overline{\beta}_{96-2000}$, $\overline{\beta}_{2001-2005}$ rendre a 1991–1995, 1996–2000, 2001–2005 közötti havi hozamadatok alapján, valamint $\overline{\alpha}$ együtthatóit azonos módon. Jelen esetben a regresszió magyarázó erejének vizsgálatára minden részvény esetében havi szinten megállapítottuk az R^2 értékét, valamint a havi $\overline{\beta}$ és $\overline{\alpha}$ együtthatók érvényességét vizsgáló *t*-értékeket. A *t*-próbák 2 fölötti abszolút értéke esetén 0,05-ot meghaladó szignifikanciaszint mellett elvethetjük azt a hipotézist, hogy az adott együttható szerepe a függő változó szóródásának leírása szempontjából elhanyagolható (az együttható értéke 0). Az *1. táblázat* utolsó három oszlopa részvényenként és együtthatónként tartalmazza, hogy a részvényenként felírt 240 regressziós összefüggés esetén az R^2 értéke hányszor érte el a legalább 0,4-es értéket, illetve a *t*-próbák abszolút értéke hányszor érte el vagy haladta meg a 2-t.

1. táblázat

Lineáris regressziós együtthatók

Részvény	Együttható	1991–1995	1996–2000	2001–2005	$R^2 \geq 0,4$	$t(\beta) \geq 2$	$t(\alpha) \geq 2$
					esetek száma		
General Electric	$\overline{\alpha}$	1,19	1,23	1,12	204	240	179
	$\overline{\beta}$	0,07	0,13	0,08			
Procter & Gamble	$\overline{\alpha}$	0,87	1,04	0,56	79	171	110
	$\overline{\beta}$	0,11	0,07	0,03			
Johnson & Johnson	$\overline{\alpha}$	1,03	1,17	0,84	91	220	77
	$\overline{\beta}$	0,11	0,07	0,06			
IBM	$\overline{\alpha}$	0,75	0,74	1,19	34	205	37
	$\overline{\beta}$	–0,13	0,10	0,08			
Altria Group	$\overline{\alpha}$	1,06	1,20	0,70	80	215	93
	$\overline{\beta}$	0,14	0,00	0,08			
Coca-Cola	$\overline{\alpha}$	0,86	0,95	1,00	78	239	145
	$\overline{\beta}$	0,19	0,06	–0,09			
Hewlett-Packard	$\overline{\alpha}$	1,48	1,65	1,32	109	240	8
	$\overline{\beta}$	0,02	0,10	–0,02			
Schlumberger	$\overline{\alpha}$	1,05	1,06	1,15	70	240	1
	$\overline{\beta}$	0,04	0,00	0,02			
Merck	$\overline{\alpha}$	0,89	1,13	0,92	70	228	103
	$\overline{\beta}$	0,11	0,06	–0,05			

1. táblázat (folytatás)
Lineáris regressziós együtthatók

Részvény	Együttható	1991–1995	1996–2000	2001–2005	$R^2 \geq 0{,}4$	$t(\beta) \geq 2$	$t(\alpha) \geq 2$
					esetek száma		
3M	$\overline{\alpha}$	0,96	0,81	0,68	93	240	80
	$\overline{\beta}$	0,05	0,01	0,10			
Wyeth	$\overline{\alpha}$	0,85	0,86	0,84	62	240	64
	$\overline{\beta}$	0,06	0,08	–0,02			
EI DuPont de Nemours	$\overline{\alpha}$	1,18	1,11	0,96	106	240	69
	$\overline{\beta}$	0,06	0,03	–0,02			
Dow Chemical	$\overline{\alpha}$	1,21	0,98	0,97	89	240	46
	$\overline{\beta}$	0,00	–0,01	0,07			
Alcoa	$\overline{\alpha}$	1,14	1,05	1,13	92	240	0
	$\overline{\beta}$	0,02	0,05	0,13			
Kimberly-Clark	$\overline{\alpha}$	0,81	0,87	0,80	33	229	93
	$\overline{\beta}$	0,09	0,02	0,03			
General Motors	$\overline{\alpha}$	1,09	0,89	1,12	73	229	4
	$\overline{\beta}$	–0,01	–0,02	–0,02			
Ford Motor	$\overline{\alpha}$	1,21	1,05	1,16	70	238	61
	$\overline{\beta}$	0,01	0,07	–0,03			
Ingersoll-Rand	$\overline{\alpha}$	1,49	1,50	1,46	115	240	2
	$\overline{\beta}$	0,06	–0,03	0,08			
Fortune Brands	$\overline{\alpha}$	1,06	0,97	0,99	64	238	68
	$\overline{\beta}$	0,04	–0,05	0,11			
Sherwin-Williams	$\overline{\alpha}$	1,34	1,21	1,24	156	240	61
	$\overline{\beta}$	0,08	–0,05	0,04			
Eastman Kodak	$\overline{\alpha}$	0,83	0,61	0,51	44	178	0
	$\overline{\beta}$	0,01	0,03	–0,13			
Commercial Metals	$\overline{\alpha}$	0,85	0,76	0,77	0	240	9
	$\overline{\beta}$	0,03	–0,04	0,11			
N. American Galvanizing	$\overline{\alpha}$	1,05	1,14	0,04	0	142	0
	$\overline{\beta}$	–0,05	–0,20	–0,10			

Összességében megállapíthatjuk, hogy mivel az esetek döntő többségében az R^2 értéke a felírt összefüggések több mint felében nem érte el a 0,4-et, a modell rendkívül gyenge magyarázó képességű. Mivel az R^2 értéke alacsony a t-próbák esetenként magas értéke félrevezető lehet.

Megjegyezzük, hogy ha a hozamok eloszlása nem normális, az együtthatók érvényességét vizsgáló t-próba értékét is fenntartásokkal kell kezeleni. E problémát is igyekszünk orvosolni a havi hozamadatok vizsgálatával, amelyekről ezen időtávra nem vethető el, hogy független, normális eloszlásúak. A regresszió érvényességének átfogó vizsgálata továbbá tartalmazza az ε_i maradéktagok elemzését is. Az ε_1, ε_2, … maradéktagokkal szembeni követelmény a független, azonos, nulla várható értékű normál eloszlás. A regressziós összefüggés rossz minőségét a modellbe nem bevont független magyarázó változók hiánya is okozhatja. A klasszikus CAPM alapján a piaci portfólió hozama jól magyarázza az egyes értékpapírok hozamának szóródását, azonban a szakirodalom szerint a vizsgálatba új független változókat bevonva a magyarázó képesség növelhető (*Fama–French* [1992], [1996]). A regressziós modellek átfogó elemzése a tanulmány témáján messze túlmutató összetett terület, ezért erre itt nem térünk ki részletesen. Szükséges még megemlíteni, hogy a klasszikus CAPM szerint nem találkozunk nullától eltérő α-ájú befektetéssel, azonban az *1. táblázat* szerint a $\overline{\alpha}$ együttható 0 voltára vonatkozó hipotézisünket számos alkalommal nem tudtuk nem elvetni (azaz nagy valószínűséggel van nullától eltérő $\overline{\alpha}$-jú részvény a piacon).

Jelenleg a logoptimális stratégia hozamára teszünk becslést, a CAPM által az egyes részvények várható hozamára tett becslés utólagos mérése nem célunk. A *2. táblázatban* meghatároztuk, hogy elméletileg a logoptimális stratégiához kalkulált β_{logopt} alapján mekkora hozamot várhattunk a vizsgált 15 éves intervallumban egy, a logoptimális stratégiával megegyező kockázatú (β-jú) befektetéstől. A CAPM alapfeltevése szerint a modell által meghatározott várható hozamnál nem realizálható szignifikánsan nagyobb sem passzív, sem aktív módszerekkel.

2. táblázat

A várható hozam CAPM-alapú becslése

Részvény	1991–1995		1996–2000		2001–2005	
	portfólió-súly	*β-súly*	portfólió-súly	*β-súly*	portfólió-súly	*β-súly*
General Electric	0,11	0,13	0,06	0,07	0,07	0,07
Procter & Gamble	0,01	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01
Johnson & Johnson	0,02	0,02	0,02	0,03	0,02	0,02
IBM	0,05	0,04	0,07	0,05	0,06	0,08
Altria Group	0,15	0,16	0,09	0,11	0,13	0,09
Coca-Cola	0,02	0,01	0,02	0,02	0,03	0,03
Hewlett-Packard	0,03	0,04	0,06	0,10	0,03	0,04
Schlumberger	0,06	0,06	0,05	0,05	0,04	0,04
Merck	0,04	0,03	0,04	0,04	0,03	0,02
3M	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00
Wyeth	0,01	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01
EI DuPont de Nemours	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	0,01
Dow Chemical	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	0,01
Alcoa	0,02	0,02	0,03	0,03	0,03	0,03
Kimberly-Clark	0,03	0,02	0,03	0,03	0,02	0,01
General Motors	0,01	0,01	0,02	0,01	0,01	0,01
Ford Motor		0,01	0,02	0,02	0,02	0,02
Ingersoll-Rand	0,03	0,04	0,04	0,06	0,06	0,09
Fortune Brands	0,02	0,02	0,02	0,01	0,02	0,02
Sherwin-Williams	0,07	0,09	0,05	0,06	0,06	0,08
Eastman Kodak	0,01	0,01	0,02	0,01	0,02	0,01
Commercial Metals	0,04	0,03	0,05	0,04	0,08	0,06
N. American Galvanizing	0,27	0,29	0,25	0,29	0,23	0,01
β_{logopt}		*1,07*		*1,10*		*0,78*
r_f		*6,16*		*5,69*		*3,70*
$\mathbb{E}\{\text{premium}\}$		*5,74*		*7,69*		*–0,81*
CAPM		*12,30*		*14,15*		*3,06*
1991–2005						**9,85**

A *2. táblázat* háromszor öt év adatait foglalja össze. Minden egyes évhez meghatározott, hogy az egyes részvény az adott években mekkora súllyal szerepelt a logoptimális portfóliókban (portfóliósúly oszlopa), illetve hogy a hozzá tartozó $\overline{\beta}$ és a portfólióban betöltött súlyának szorzata alapján a logoptimális stratégia adott időszakra meghatározott β_{logopt}-jának mekkora részét teszi ki (β-súly oszlopa). A $\overline{\beta}$-kat az oszlopindexszel jelzett időszak alapján számítottuk ki. A táblázatok alsó fele az adott időszakban a logoptimális stratégiához tartozó β_{logopt}-ot, az adott időszakhoz tartozó kockázatmentes r_f kamatlábat, a várható kockázati prémiumot és az időszakra a modell által becsült várható hozamot tartalmazzák. A várható hozam háromszor öt évre tett becslésének átlaga adja meg, hogy a 15 év alatt átlagosan mekkora hozamot várhattunk el a CAPM szerint a logoptimális stratégiától. A becsléshez a (15) kifejezést használjuk, a klasszikus modell feltevései alapján feltételezzük, hogy nincsen nem nulla α-jú befektetés.

Célunk megvizsgálni, hogy a logoptimális stratégia valóban a hozzá tartozó β_{logopt}-nak megfelelő várható hozammal rendelkezik-e, vagy ellentmondásra jutunk a CAPM modellel, és a 15 év során sikerülhet szignifikánsan nagyobb, a CAPM által becsült várható hozamtól eltérő átlagos hozamot realizálnunk.

Hipotézisvizsgálat. A hipotézisvizsgálat során megmértük, hogy a logoptimális stratégia $c = 0,1$ százalék költségtényezőt feltételezve, a 15 év folyamán átlagosan 38,52 százalékos éves hozamot ér el, az éves hozamok korrigált torzítatlan empirikus szórása pedig 35,04 százalék volt. A CAPM modell szerint pedig az éves várható hozam 9,85 százalék. H_0 hipotézisünk szerint a logoptimális stratégia éves hozamainak várható értéke a CAPM által becsült várható hozam. H_0 vizsgálatára *z-próbát* alkalmazunk.[10] A *t*-érték 15 elemes minta esetén

$$z = \frac{38{,}52 - 9{,}85}{\dfrac{35{,}04}{\sqrt{15}}} = 3{,}168,$$

amely esetben a H_0 hipotézist 0,001 szignifikanciaszinten elvethetjük. Sőt, az a hipotézis, miszerint a logoptimális portfólió átlagos hozama szignifikánsan nagyobb, mint amit a CAPM becsül, nem vethető el.

Az eredmények sejtetik, hogy a CAPM nem képes a várható hozamok pontos becslésére, mivel az empirikus logoptimális stratégiákkal olyan anomáliák fedezhetők fel, amelyeket kihasználva jelentős hozamtöbbletet érhetünk el. Ennek okai lehetnek a modellből hiányzó független változók vagy a lineáris becslés alkalmatlansága is. Ezek alapján megfogalmazhatnánk akár a tőkepiaci hatékonyságnak ellentmodó állításunkat is, vagy elvethetnénk a modell relevanciáját, valóságleíró képességét. Nem lennénk elsők ebben a sorban, hiszen a feljebb már idézett intertemporális CAPM, az APT, a háromfaktormodellek és a többi egyensúlyimodell-próbálkozások mind ezt tették. Nehéz e pillanatban eldönteni, hogy miről is van szó, hiszen *Fama* [1991] kapcsolt hipotézisének megfelelően egy anomália vagy abnormális hozamot eredményező kereskedési stratégia önmagában nem biztos, hogy a hatékony piacok évtizedek óta meglehetősen erős és máig aránylag stabil bástyáit ostromolja, elképzelhető, hogy az egyensúlyi modellben kell keresni a hibát. Hozzátéve azt is, hogy itt nem a statisztikai értelemben vett hibákról beszél a chicagói professzor.

[10] Az egymintás *Kolmogorov–Smirnov*-próba alapján nem tudjuk elvetni azt a hipotézist, hogy a logoptimális stratégia éves hozamai normális eloszlásúak.

Empirikus Sharpe-ráták. Az eredmények megerősítése érdekében a módszerek teljesítményét az empirikus Sharpe-ráták összehasonlításával is elvégezzük (13) alapján. A *3. táblázatban* az éves kockázati prémiumok mellett feltüntettük az éves r_f kockázatmentes kamatlábakat és a Sharpe-ráták kiszámításához szükséges átlagos kockázatiprémium- és szórásadatokat. Az eredmények kiemelkedő jelentőségűek, ugyanis empirikus bizonyítékot kaptunk arra, hogy a logoptimális stratégiák megfelelő költségoptimalizációs heurisztikával kiegészítve, kiemelkedő hozam elérésére képesek a kockázat (szórás) robbanásszerű növekedésének kiküszöbölésével, amelyet jól illusztrál az 1 közeli Sharpe-ráta értéke.

3. táblázat

A stratégiák éves kockázati prémiumai, a kockázatmentes értékpapír éves hozamai és az empirikus Sharpe-ráták

Év	NYSE	Logoptimális	r_f
1991	11,60	41,91	7,11
1992	0,71	–42,61	6,01
1993	4,89	–0,70	5,01
1994	–10,75	–10,68	6,48
1995	22,23	37,85	6,18
1996	13,20	50,22	6,00
1997	15,43	18,79	6,03
1998	11,18	2,29	5,02
1999	–1,92	91,42	5,40
2000	0,55	63,50	5,98
2001	–18,19	80,20	4,46
2002	–26,57	33,77	3,75
2003	26,76	53,18	2,93
2004	4,52	46,77	3,37
2005	9,43	34,26	3,97
Átlag prémium	4,21	33,34	
Szórás	14,09	33,85	
Sharpe-ráta	*0,299*	*0,985*	

Hivatkozások

Algoet, P. [1992]: Universal schemes for prediction, gambling, and portfolio selection. Annals of Probability, 20. 901–941. o.

Algoet, P.–Cover, T. [1988]: Asymptotic optimality asymptotic equipartition properties of log-optimum investments. Annals of Probability, 16. 876–898. o.

Banz, R. [1981]: The relationship between return and market value of common stocks. Journal of Financial Economics, Vol. 9. No. 1. 3–18. o.

Basu, S. [1977]: The investment performance of common stocks in relation to their price-earnings ratio. The Journal of Finance, Vol. 32. No. 3. 663–682. o.

Breiman, L. [1961]: Optimal gambling systems for favorable games. Megjelent: Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. University of California Press, Berkeley, 65–78. o.

Cover, T. [1991]: Universal portfolios. Mathematical Finance, 1. 1–29. o.

Fama, E. F. [1991]: Efficient Capital Markets: II. The Journal of Finance, Vol. 46. No. 5. 1575–1617.

Fama, E. F.–French, K. R. [1992]: The cross-section of expected stock returns. The Journal of Finance, Vol. 47. No. 2. 427–465. o.
Fama, E. F.–French, K. R. [1993]: Common risk factors in the returns on stocks and bonds. Journal of Financial Economics, Vol. 33. No. 1. 3–56. o.
Fama, E. F.–French, K. R. [1996]: Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies. The The Journal of Finance, Vol. 51. No. 1. 55–84. o.
Finkelstein, M.–Whitley, R. [1981]: Optimal strategies for repeated games. Advances in Applied Probability, 13. 415–428. o.
Györfi László–Lugosi Gábor–Udina, F. [2006]: Nonparametric kernel-based sequential investment strategies. Mathematical Finance, 16. 337–357. o.
Györfi László–Urbán András–Vajda István [2007]: Kernel-based semi-log-optimal empirical portfolio selection strategies. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 10. 505–516. o.
Györfi László–Vajda István [2008]: Growth optimal portfolio selection strategies with transaction costs. Algorithmic Learning Theory, Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag. 108–122. o.
Kelly, J. [1956]: A new interpretation of information rate. Bell System Technical Journal, 35. 917–924. o.
Latané, H. [1959]: Criteria for choice among risky ventures. Journal of Political Economy, 38. 145–155. o.
Lintner, J. [1965]: The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. Review of Economics and Statistics, Vol. 47. No. 1. 13–37. o.
Mossin, J. [1966]: Equilibrium in a Capital Asset Market. Econometrica, Vol. 34. No. 4. 468–483.
Ottucsák György–Vajda István [2006]: Empirikus portfólióstratégiák. Közgazdasági Szemle, 7–8. sz. 624–640. o.
Schäfer, D. [2002]: Nonparametric Estimation for Finantial Investment under Log-Utility. PhD-disszertáció, Mathematical Institute, University Stuttgart, Shaker Verlag, Aachen.
Sharpe, W. F. [1964]: Capital Asset Prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. The Journal of Finance, 19. 425–442. o.
Sharpe, W. F. [1994]: The Sharpe ratio. Journal of Portfolio Management, 21. 49–58. o.
Singer, Y. [1997]: Switching portfolios. International Journal of Neural Systems, 8. 445–455. o.